

Unidad 8.

Funciones

1. Estudio gráfico de una función

Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes funciones es polinómica y cuál racional:

a) $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$

Solución:

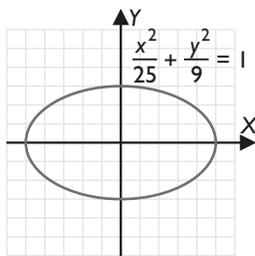
a) Racional.

b) Polinómica.

Aplica la teoría

Indica si cada una de las siguientes gráficas es o no una función y razona la respuesta.

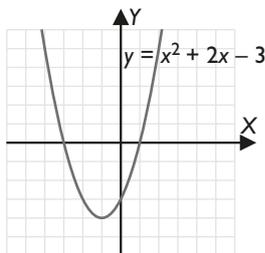
1



Solución:

No es una función. Por ejemplo, para $x = 0$ existen dos valores de y , el 3 y el -3

2

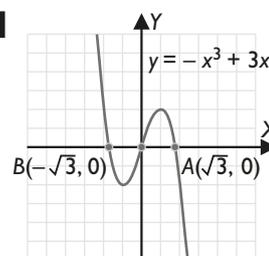


Solución:

Sí es una función, porque para cada valor de x existe un único valor de y

Dadas las siguientes gráficas, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.

3



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:

– Eje X: $B(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0)$

– Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

– Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

– Negativa (-): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- a) Máximo relativo: $C(1, 2)$
 b) Mínimo relativo: $D(-1, -2)$

Monotonía:

- Creciente: $(-1, 1)$
 – Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

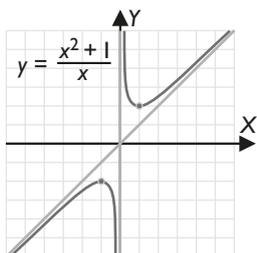
Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
 – Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

4



Solución:

1. Tipo de función: racional.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
 – Horizontales: no tiene.
 – Oblicuas: $y = x$

7. Corte con los ejes: no corta a ninguno de los ejes.

Signo:

- Positiva (+): $(0, +\infty)$
 – Negativa (-): $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- a) Máximo relativo: $A(-1, -2)$
 b) Mínimo relativo: $B(1, 2)$

Monotonía:

- Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 – Decreciente: $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 – Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

2. Funciones reales de variable real

Piensa y calcula

Considera los rectángulos con un lado de triple longitud que el otro. Expresa el perímetro y el área en función del lado menor.

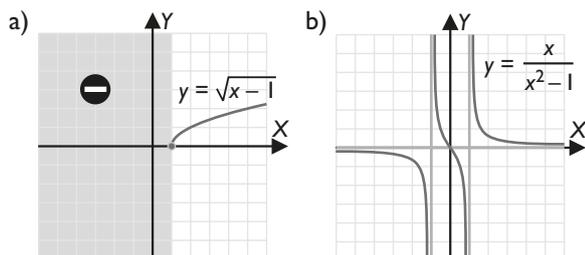


Solución:

$$P(x) = 8x; A(x) = 3x^2$$

Aplica la teoría

5 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:



Solución:

- a) Irrracional. $\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$
 b) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

6 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

- a) $y = x^3 - 4x^2 + 5$ b) $y = \frac{4}{x-5}$
 c) $y = \frac{x+3}{x^2-4}$ d) $y = \sqrt{x+1}$

Solución:

- a) Polinómica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 b) Racional.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$
 c) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
 d) Irrracional. $\text{Dom}(f) = [-1, +\infty)$

7 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

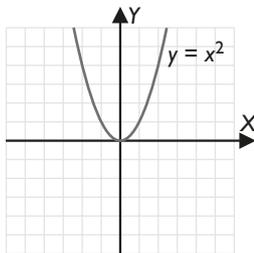
- a) $y = 2^x$
- b) $y = \log x$
- c) $y = \log_2(x - 3)$
- d) $y = \text{sen}(x + 1)$

Solución:

- a) Exponencial. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- b) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- c) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (3, +\infty)$
- d) Trigonométrica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

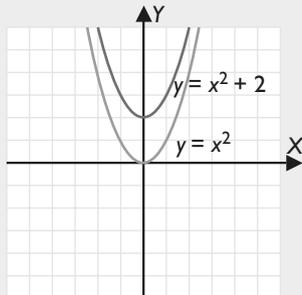
8 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, dibuja la traslación que se pide en cada caso y halla su ecuación.

- a) $f(x) + 2$
- b) $f(x + 2)$
- c) $f(x - 1)$
- d) $f(x - 2) + 1$



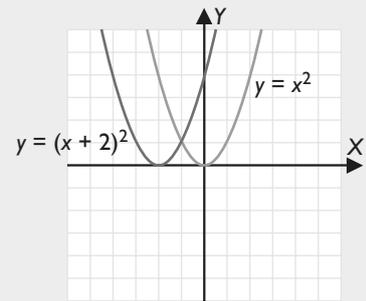
Solución:

a)



$y = x^2 + 2$

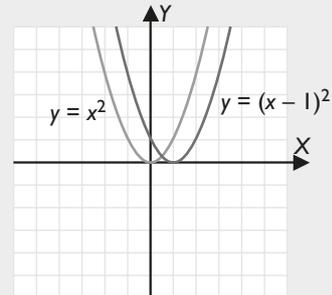
b)



$y = (x + 2)^2$

$y = x^2 + 4x + 4$

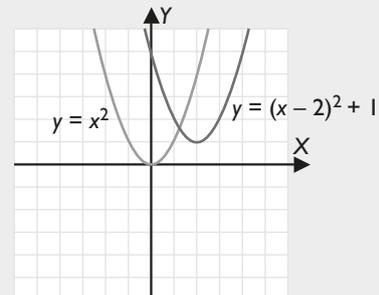
c)



$y = (x - 1)^2$

$y = x^2 - 2x + 1$

d)



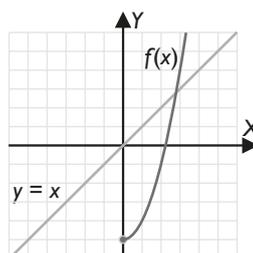
$y = (x - 2)^2 + 1$

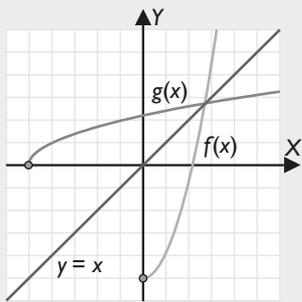
$y = x^2 - 4x + 5$

3. Operaciones con funciones

Piensa y calcula

Dada la gráfica de la función $f(x)$, dibuja la gráfica $g(x)$ simétrica respecto de la recta $y = x$. Calcula el dominio y el recorrido o imagen de $f(x)$ y de $g(x)$. ¿Qué relación existe entre ellos?



Solución:

$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty), \text{Im}(f) = [-5, +\infty)$$

$$\text{Dom}(g) = [-5, +\infty), \text{Im}(g) = [0, +\infty)$$

$$\text{Dom}(f) = \text{Im}(g) \text{ y } \text{Dom}(g) = \text{Im}(f)$$

Aplica la teoría

9 Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ en cada uno de estos casos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = \sin x$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = x + 2, (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

b) $(g \circ f)(x) = \sin(x^2 - 3x)$

$(f \circ g)(x) = \sin^2 x - 3 \sin x$

10 Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3x + 2$

b) $y = \sqrt{x-1}$

c) $y = \frac{x+2}{x-3}$

d) $y = x^2 + 3; x \geq 0$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

b) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c) $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$

11 Indica si las siguientes funciones son pares, impares o no son ni pares ni impares, y calcula su simetría:

a) $y = x^2 - 9$

b) $y = x^2 - 4x$

c) $y = \frac{2}{x}$

d) $y = \frac{3x-5}{x-2}$

Solución:

a) Par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

b) Ni par, ni impar.

c) Impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

d) Ni par, ni impar.

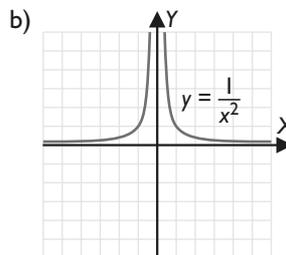
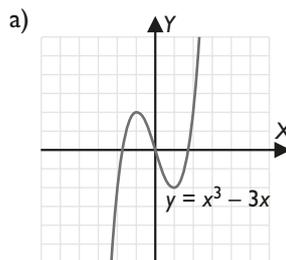
12 Calcula la composición $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

13 Indica si las siguientes funciones son pares o impares analizando la gráfica:

**Solución:**

a) Impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

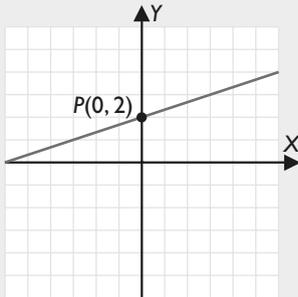
b) Par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

4. Funciones polinómicas

Piensa y calcula

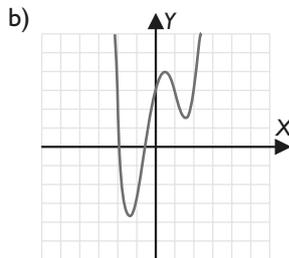
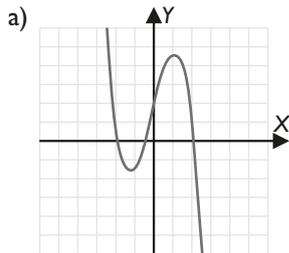
Dibuja una recta que tenga de pendiente $\frac{1}{3}$ y pase por el punto $P(0, 2)$

Solución:



Aplica la teoría

14 Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?



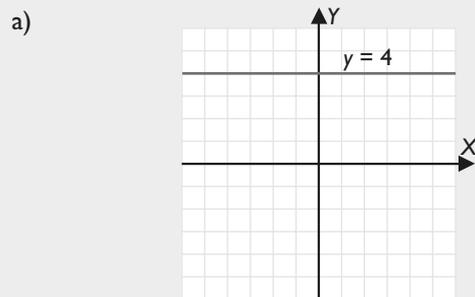
Solución:

- a) De 3.^{er} grado. El coeficiente principal es negativo.
- b) De 4.^o grado. El coeficiente principal es positivo.

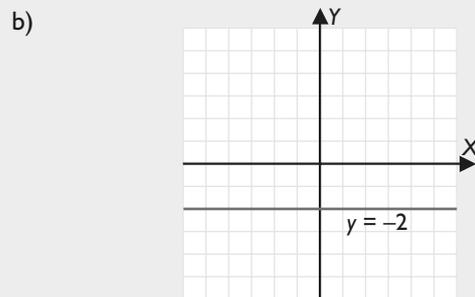
15 Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen:

- a) $y = 4$
- b) $y = -2$
- c) $y = \frac{3x}{2}$
- d) $y = -2x$
- e) $y = x + 3$
- f) $y = -\frac{2x}{3} + 4$

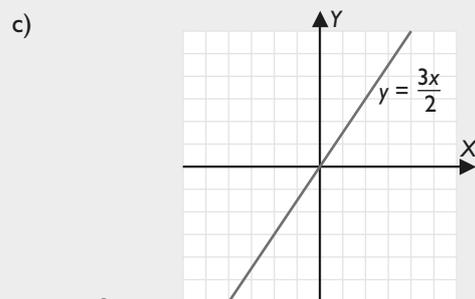
Solución:



$m = 0$
Ordenada en el origen: 4

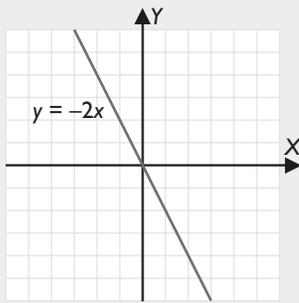


$m = 0$
Ordenada en el origen: -2



$m = \frac{3}{2}$
Ordenada en el origen: 0

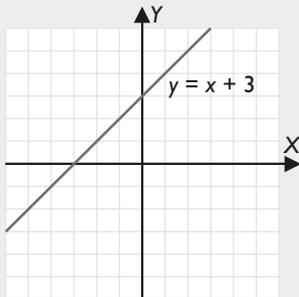
d)



$$m = -2$$

Ordenada en el origen: 0

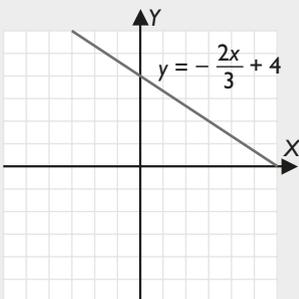
e)



$$m = 1$$

Ordenada en el origen: 3

f)



$$m = -\frac{2}{3}$$

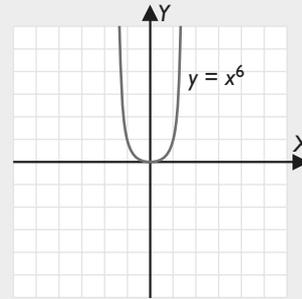
Ordenada en el origen: 4

16 Haz un dibujo aproximado de las funciones:

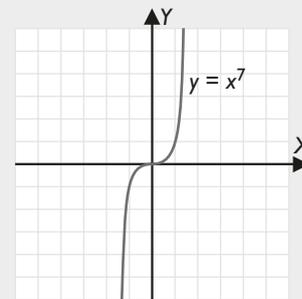
- a) $y = x^6$
- b) $y = x^7$

Solución:

a)

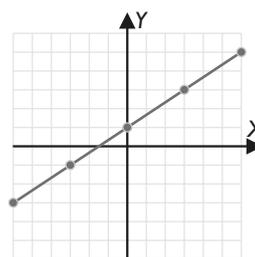


b)

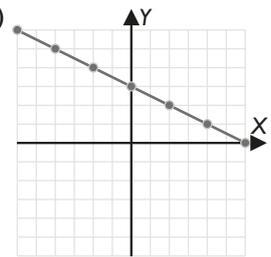


17 Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

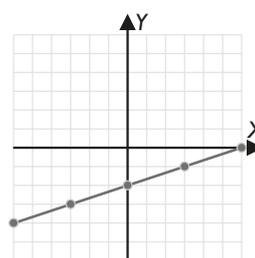
a)



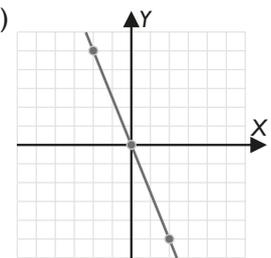
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = \frac{2x}{3} + 1$

b) $y = -\frac{x}{2} + 3$

c) $y = \frac{x}{3} - 2$

d) $y = -\frac{5x}{2}$

5. Funciones cuadráticas

Piensa y calcula

Dada la fórmula del eje de simetría de una parábola $x = -\frac{b}{2a}$, despeja mentalmente b

En una parábola, se conoce el eje $x = 3$ y $a = 1$. ¿Cuánto vale b ?

Solución:

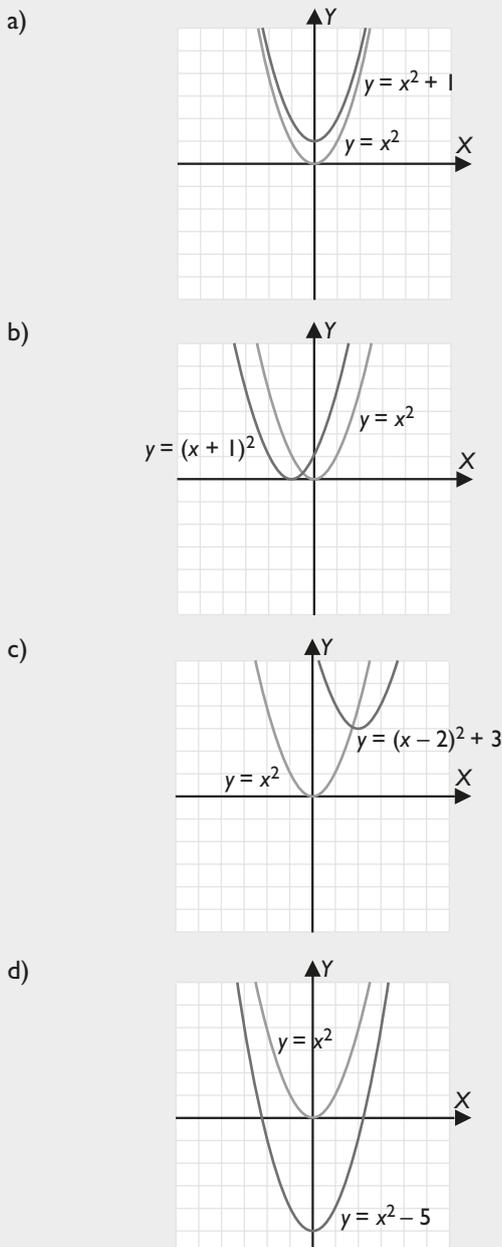
$$b = -2ax \Rightarrow b = -6$$

Aplica la teoría

18 Representa la parábola $y = x^2$, y , a partir de ella, las siguientes funciones:

- a) $y = x^2 + 1$
- b) $y = (x + 1)^2$
- c) $y = (x - 2)^2 + 3$
- d) $y = x^2 - 5$

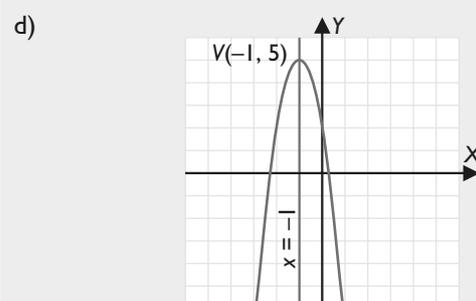
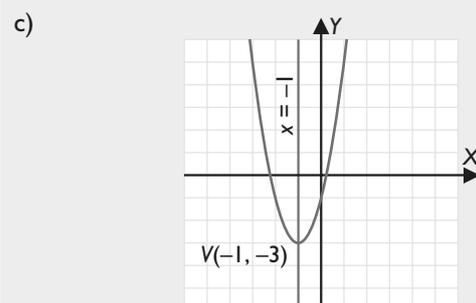
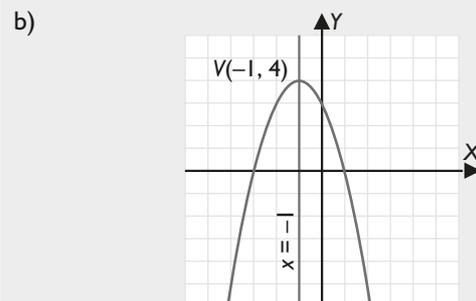
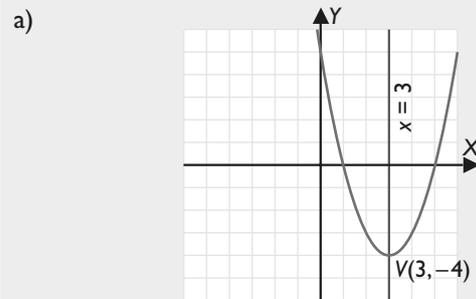
Solución:



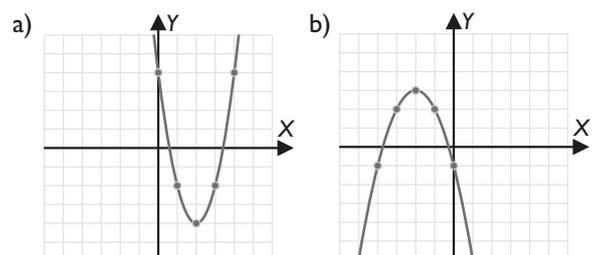
19 Representa las siguientes parábolas:

- a) $y = x^2 - 6x + 5$
- b) $y = -x^2 - 2x + 3$
- c) $y = 2x^2 + 4x - 1$
- d) $y = -3x^2 - 6x + 2$

Solución:



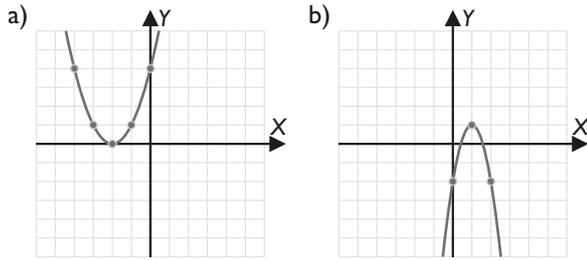
20 Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:



Solución:

- a) $y = 2x^2 - 8x + 4$
- b) $y = -x^2 - 4x - 1$

21 Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:



Solución:

a) $y = x^2 + 4x + 4$

b) $y = -3x^2 + 6x - 2$

22 El número de bolígrafos vendidos en una papelería viene dado por la función $f(x) = 6 - x$, siendo x el precio en euros. Calcula:

a) La función de ingresos, $I(x)$

b) El número de bolígrafos que hay que vender para que los ingresos sean máximos.

Solución:

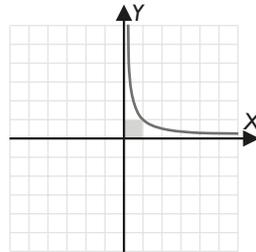
a) $I(x) = 6x - x^2$

b) $V(3, 9)$, que es el máximo. Hay que vender 3 bolígrafos.

6. Funciones racionales e irracionales

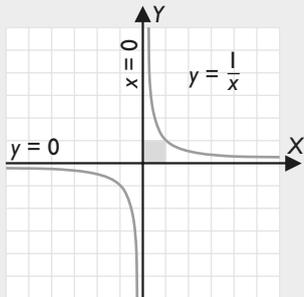
Piensa y calcula

Analiza si la siguiente función $f(x) = 1/x$ es impar y dibuja en tu cuaderno la parte de gráfica que falta y las asíntotas.



Solución:

Sí es impar.



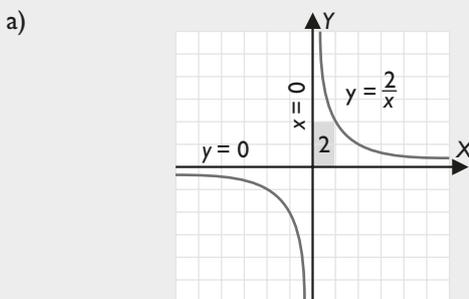
Aplica la teoría

23 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante, k , de proporcionalidad inversa:

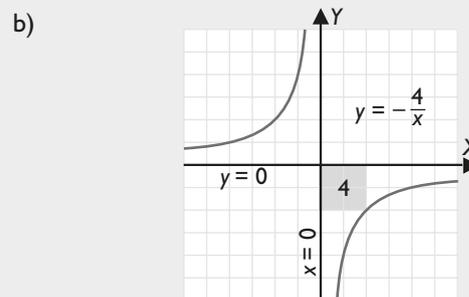
a) $y = \frac{2}{x}$

b) $y = -\frac{4}{x}$

Solución:



$k = 2$



$k = -4$

24 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante k

a) $y = \frac{x+3}{x+1}$

b) $y = \frac{3x-5}{x-2}$

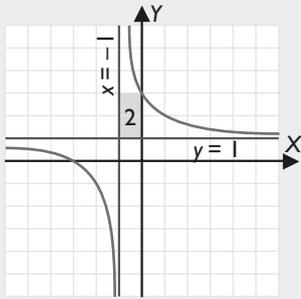
c) $y = \frac{2x-5}{x-1}$

d) $y = -\frac{x+1}{x+2}$

Solución:

a)

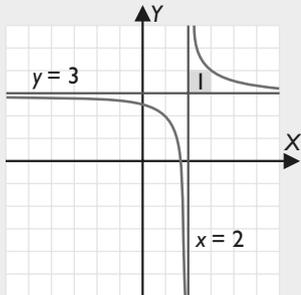
$$y = \frac{2}{x+1} + 1$$



$$k = 2$$

b)

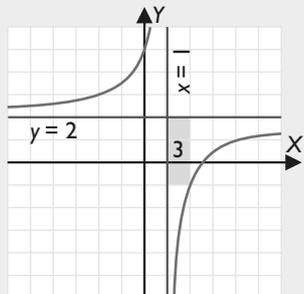
$$y = \frac{1}{x-2} + 3$$



$$k = 1$$

c)

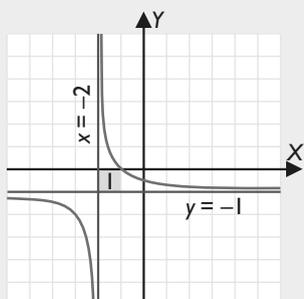
$$y = \frac{-3}{x-1} + 2$$



$$k = -3$$

d)

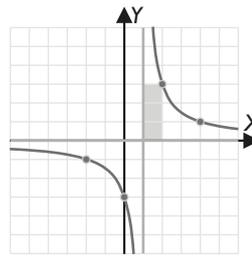
$$y = \frac{1}{x+2} - 1$$



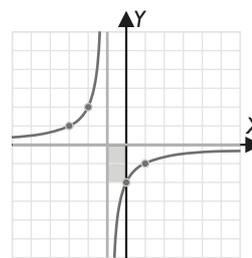
$$k = 1$$

25 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



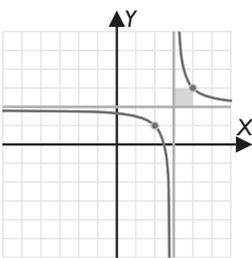
Solución:

a) $y = \frac{3}{x-1}$

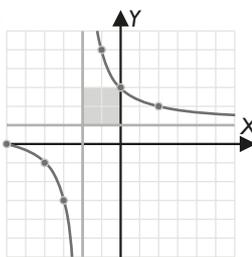
b) $y = -\frac{2}{x+1}$

26 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



Solución:

a) $y = \frac{1}{x-3} + 2$

b) $y = \frac{4}{x+2} + 1$

27 Dibuja las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \sqrt{x-1}$

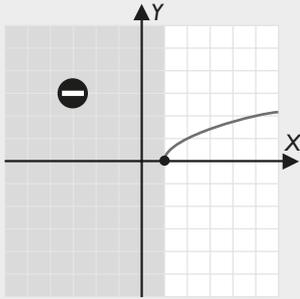
b) $y = -2 + \sqrt{x-1}$

c) $y = -\sqrt{x+2}$

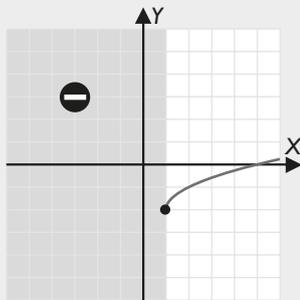
d) $y = 3 - \sqrt{2-x}$

Solución:

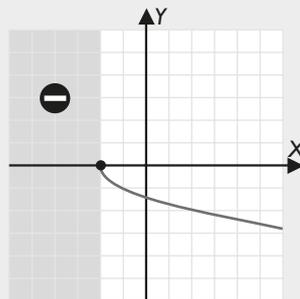
a)



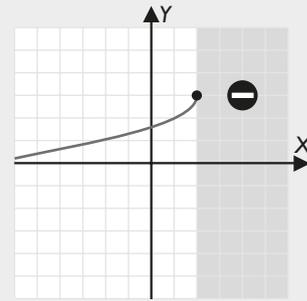
b)



c)

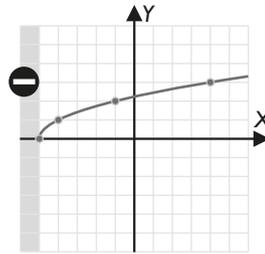


d)

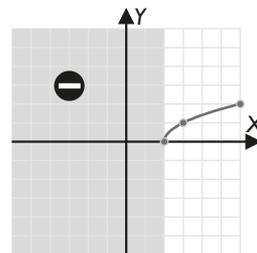


28 Escribe la fórmula de las siguientes funciones irracionales:

a)



b)



Solución:

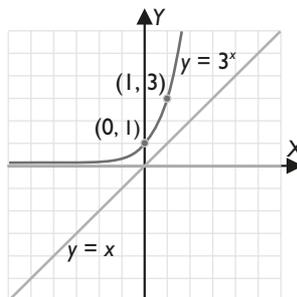
a) $y = \sqrt{x + 5}$

b) $y = \sqrt{x - 2}$

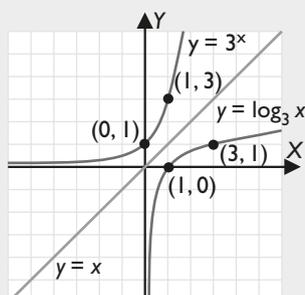
7. Funciones exponenciales y logarítmicas

Piensa y calcula

Observando la gráfica correspondiente a $y = 3^x$, dibuja en tu cuaderno la gráfica de la función $y = \log_3 x$, sabiendo que es inversa de la anterior.



Solución:



Aplica la teoría

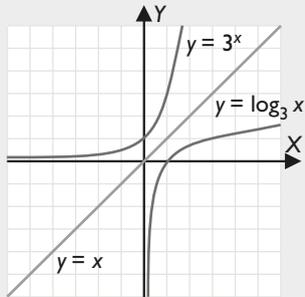
29 Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3^x$

b) $y = \log_3 x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, $y = x$; por tanto, una es inversa de la otra.

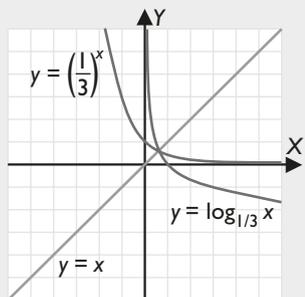
30 Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones siguientes y sus asíntotas:

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $y = \log_{1/3} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, $y = x$; por tanto, una es inversa de la otra.

31 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 1 + 2^x$

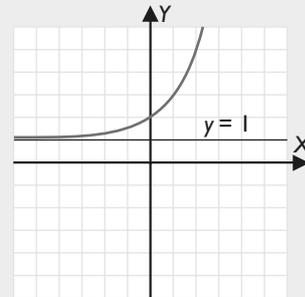
b) $y = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $y = 2^{x-3}$

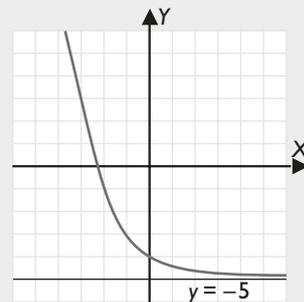
d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

Solución:

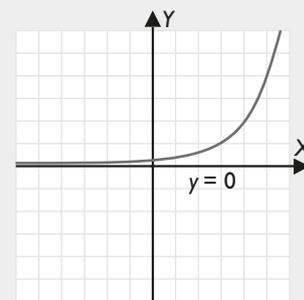
a)



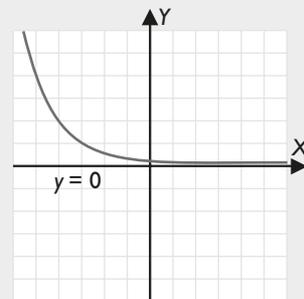
b)



c)



d)



32 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3 + \log_2 x$

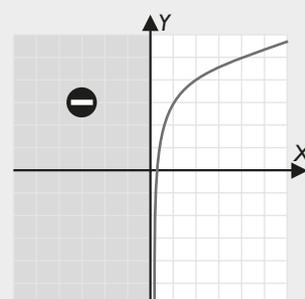
b) $y = -3 + \log_{1/2} x$

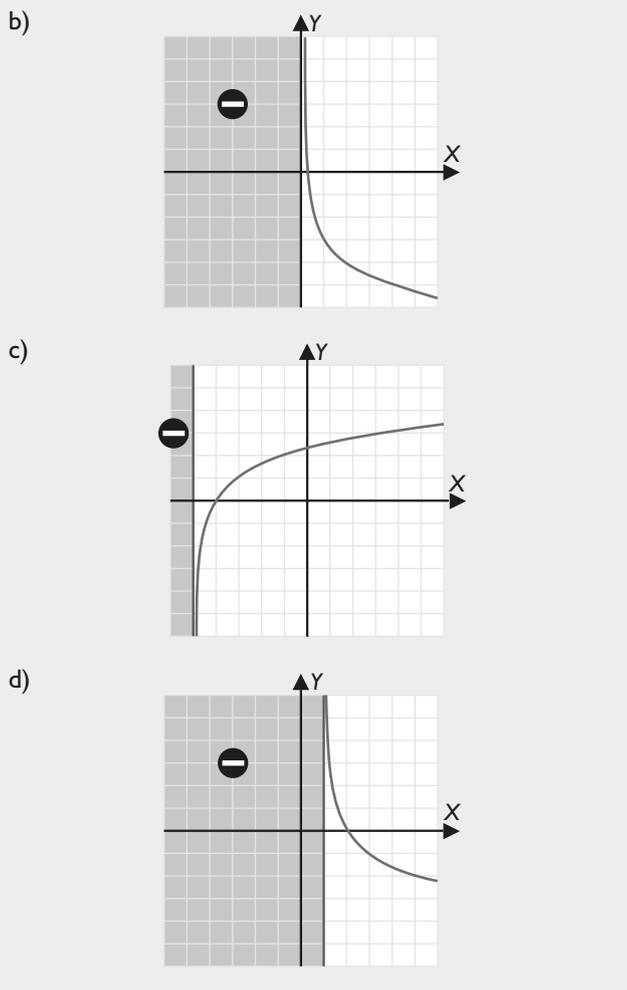
c) $y = \log_2 (x + 5)$

d) $y = \log_{1/2} (x - 1)$

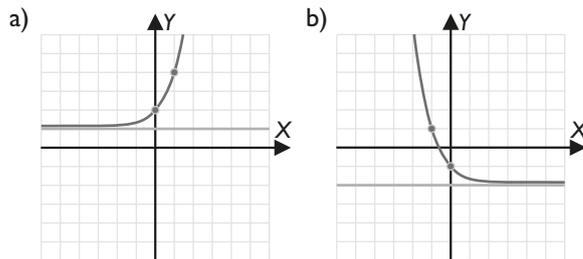
Solución:

a)





33 Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

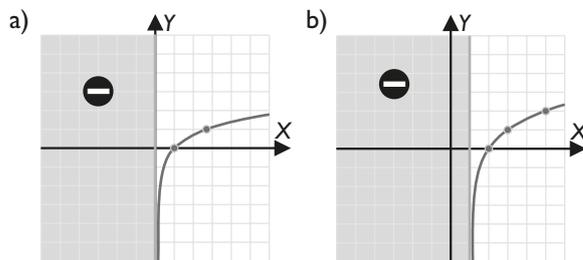


Solución:

a) $y = 1 + 3^x$

b) $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

34 Escribe las fórmulas de las siguientes funciones:



Solución:

a) $y = \ln x$

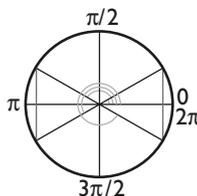
b) $y = \log_2 (x - 1)$

8. Funciones trigonométricas

Piensa y calcula

Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

x	30°	150°	210°	330°
$\text{sen } x$				
$\text{cos } x$				
$\text{tg } x$				



Solución:

x	30°	150°	210°	330°
$\text{sen } x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\text{cos } x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{tg } x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Aplica la teoría

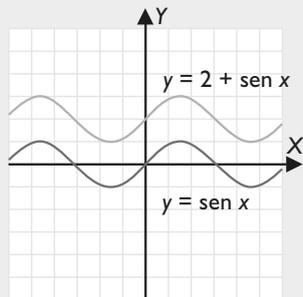
35 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{sen } x$

a) $y = 2 + \text{sen } x$

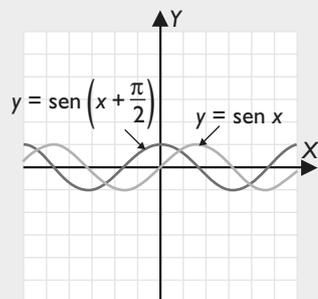
b) $y = \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

Solución:

a)



b)



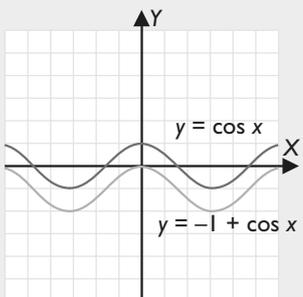
36 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{cos } x$

a) $y = -1 + \text{cos } x$

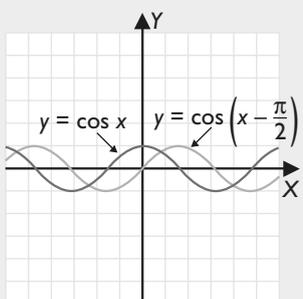
b) $y = \text{cos} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

Solución:

a)



b)



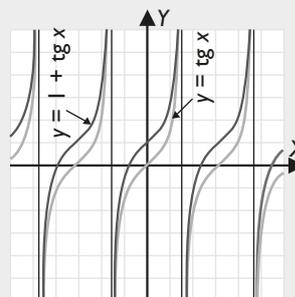
37 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{tg } x$

a) $y = 1 + \text{tg } x$

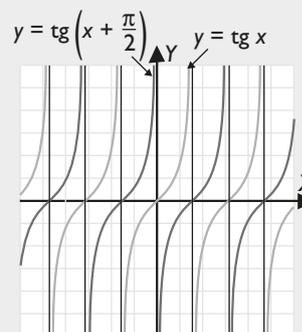
b) $y = \text{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

Solución:

a)



b)



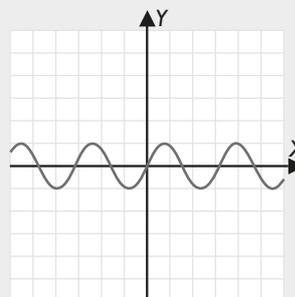
38 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen } 2x$

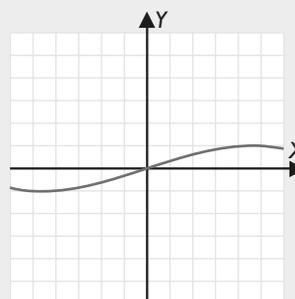
b) $y = \text{sen} \frac{x}{3}$

Solución:

a)



b)



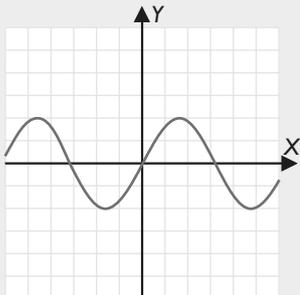
39 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 2 \operatorname{sen} x$

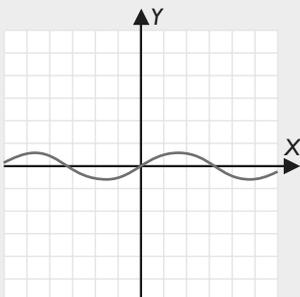
b) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

Solución:

a)



b)



40 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \cos 2x$

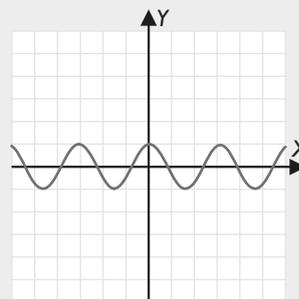
b) $y = \cos \frac{x}{3}$

c) $y = 2 \cos x$

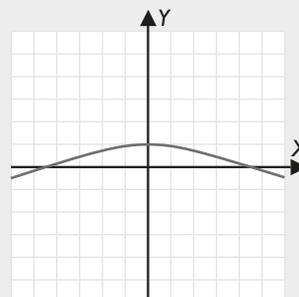
d) $y = \frac{1}{2} \cos x$

Solución:

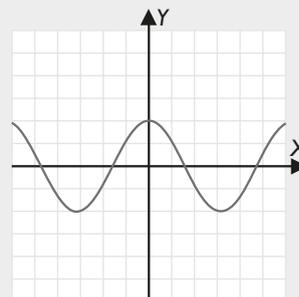
a)



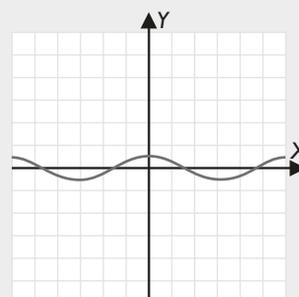
b)



c)

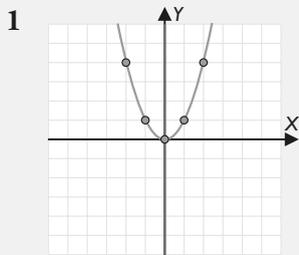


d)

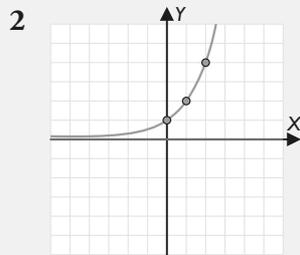


Funciones elementales que hay que conocer

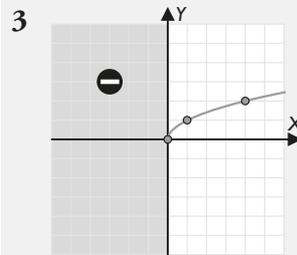
Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su fórmula



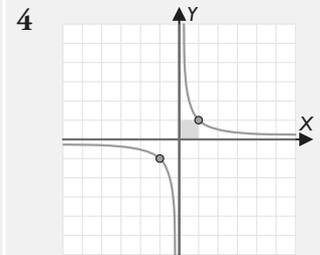
Solución:
Polinómica: $y = x^2$



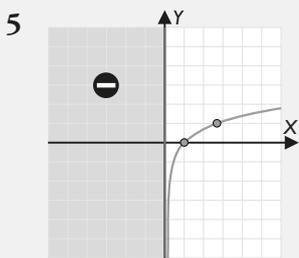
Solución:
Exponencial: $y = 2^x$



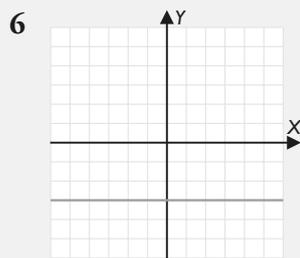
Solución:
Irrracional: $y = \sqrt{x}$



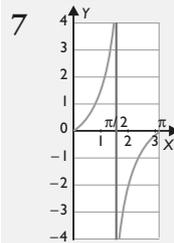
Solución:
Racional: $y = \frac{1}{x}$



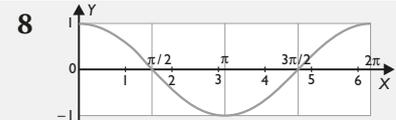
Solución:
Logarítmica: $y = \ln x$



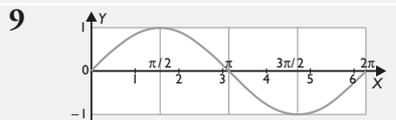
Solución:
Polinómica: $y = -3$



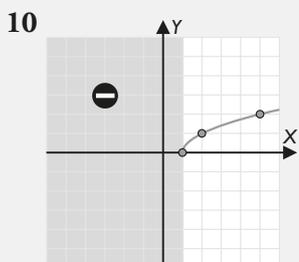
Solución:
Trigonométrica:
 $y = \text{tg } x$



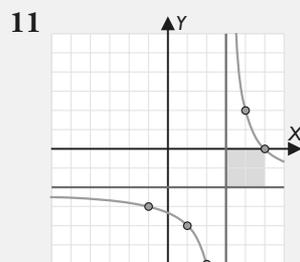
Solución: Trigonométrica: $y = \cos x$



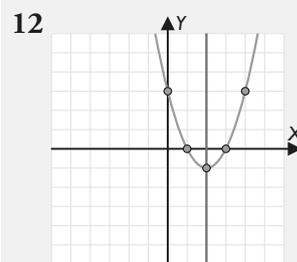
Solución: Trigonométrica: $y = \text{sen } x$



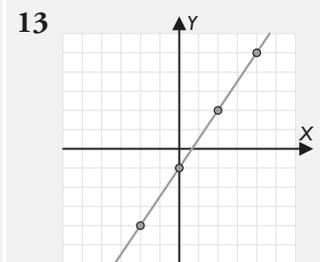
Solución:
Irrracional: $y = \sqrt{x-1}$



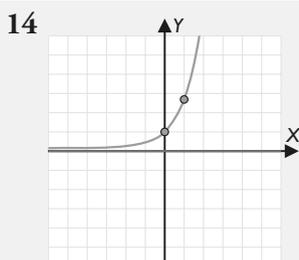
Solución:
Racional: $y = \frac{4}{x-3} - 2$



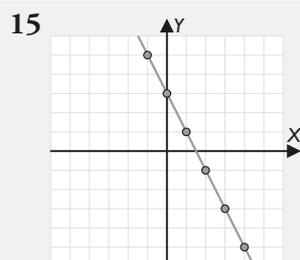
Solución:
Polinómica: $y = x^2 - 4x + 3$



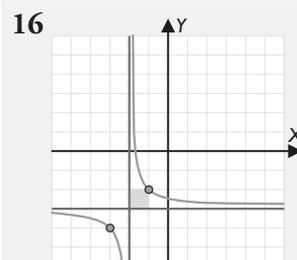
Solución:
Polinómica: $y = \frac{3x}{2} - 1$



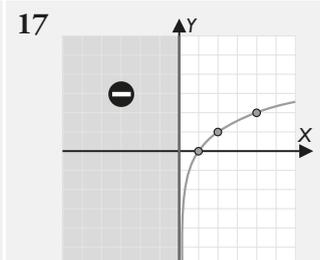
Solución:
Exponencial: $y = e^x$



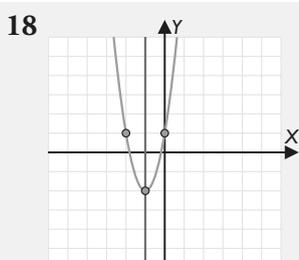
Solución:
Polinómica: $y = -2x + 3$



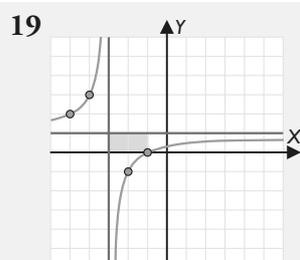
Solución:
Racional: $y = \frac{1}{x+2} - 3$



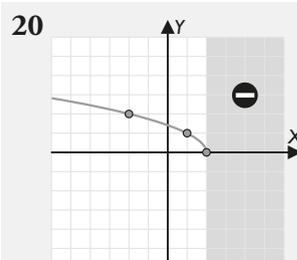
Solución:
Logarítmica: $y = \log_2 x$



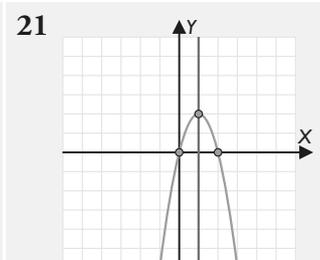
Solución:
Polinómica: $y = 3x^2 + 6x + 1$



Solución:
Racional: $y = -\frac{2}{x+3} + 1$



Solución:
Irrracional: $y = \sqrt{2-x}$

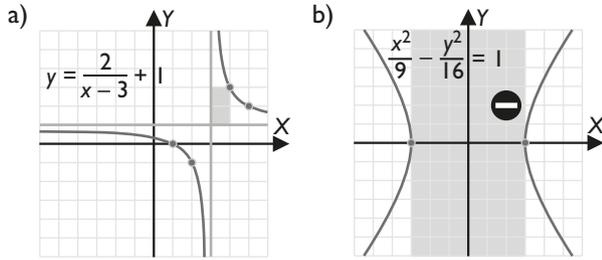


Solución:
Polinómica: $y = -2x^2 + 4x$

Ejercicios y problemas propuestos

1. Estudio gráfico de una función

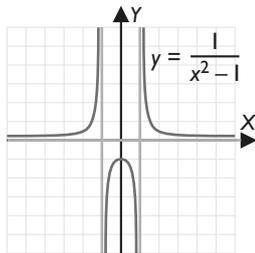
41 Indica cuál de las siguientes gráficas es función.



Solución:

- a) Sí es función, porque para cada valor de x existe un único valor de y
 b) No es función. Por ejemplo, para $x = 4$ existen dos valores de y

42 Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes: $A(0, -1)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -1)$
 Monotonía:
 - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 - Decreciente: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

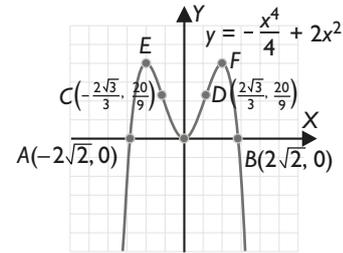
– Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

– Cóncava (\cap): $(-1, 1)$

10. Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

43 Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.

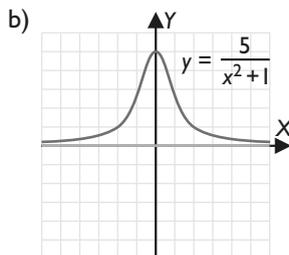
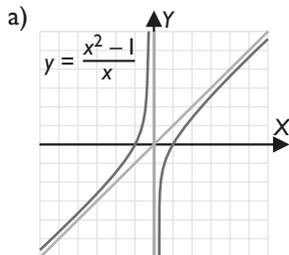


Solución:

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo \mathbb{R}
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X : $A(-2\sqrt{2}, 0), O(0, 0), B(2\sqrt{2}, 0)$
 - Eje Y : $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $E(-2, 4), F(2, 4)$
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$
 Monotonía:
 - Creciente: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 - Decreciente: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- Puntos de inflexión: $C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right), D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
 - Cóncava (\cap): $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
- Recorrido o imagen: $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

2. Funciones reales de variable real

44 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:



Solución:

- a) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 b) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

45 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = x^4 - x^2 + 1$ b) $y = \frac{2}{x + 3}$
 c) $y = \frac{x + 1}{x^2 - x - 6}$ d) $y = 3 + \sqrt{x + 2}$

Solución:

- a) Polinómica.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 b) Racional.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$
 c) Racional.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$
 d) Irrracional.
 $\text{Dom}(f) = [-2, +\infty)$

46 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ b) $y = \frac{3}{x^2 + x}$
 c) $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$ d) $y = \sqrt{4 - 2x}$

Solución:

- a) Polinómica.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 b) Racional.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$
 c) Racional.
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
 d) Irrracional.
 $\text{Dom}(f) = (-\infty, 2]$

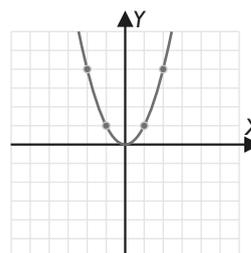
47 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
 c) $y = \ln(x - 2)$ d) $y = \cos(x - \pi)$

Solución:

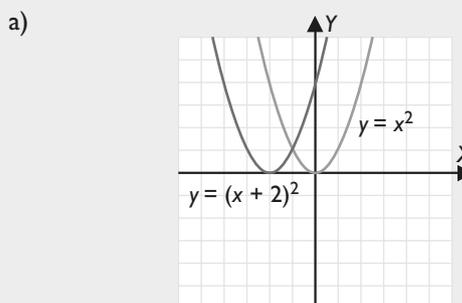
- a) Exponencial. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 b) Exponencial. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 c) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (2, +\infty)$
 d) Trigonométrica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

48 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, dibuja las gráficas siguientes y halla su ecuación:

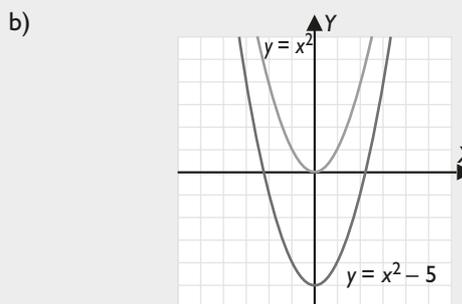


a) $y = f(x + 2)$ b) $y = f(x) - 5$
 c) $y = f(x - 3) + 1$ d) $y = f(x + 1) - 2$

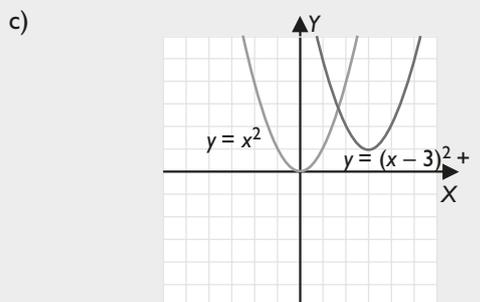
Solución:



$y = x^2 + 4x + 4$

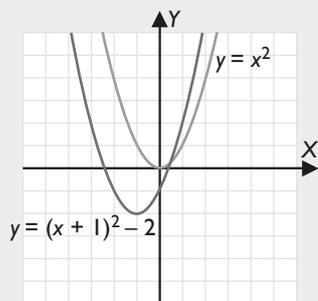


$y = x^2 - 5$



$y = x^2 - 6x + 10$

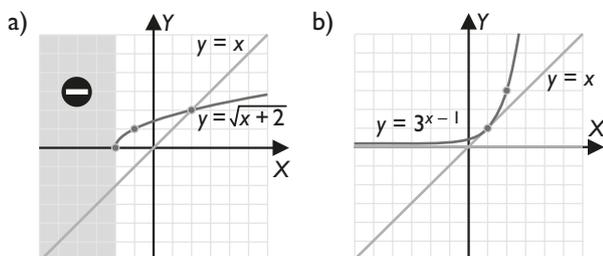
d)



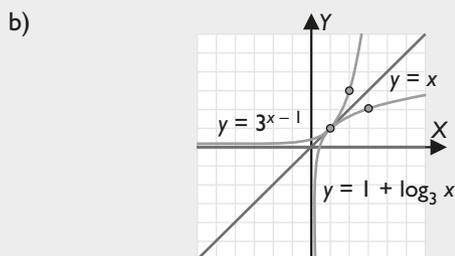
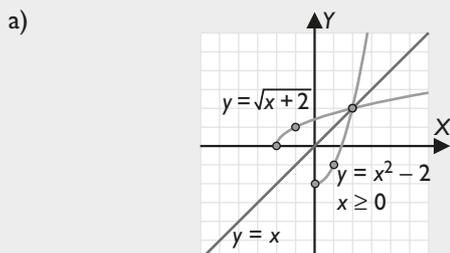
$$y = x^2 + 2x - 1$$

3. Operaciones con funciones

49 Dibuja la función inversa de $y = f(x)$ en cada caso y halla su fórmula.



Solución:



50 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:
a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ b) $(f \circ g)(x) = x - 4$

51 Dadas las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = 2x + 1$, calcula:
a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = 1 + 2 \sin x$
b) $(f \circ g)(x) = \sin(2x + 1)$

52 Calcula la función inversa de $y = f(x)$ en los siguientes casos:

- a) $y = 2x + 1$
- b) $y = -3x + 2$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$
b) $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$

53 Calcula la función inversa de $y = f(x)$ en los siguientes casos:

- a) $y = \frac{x}{x+3}$
- b) $y = x^2 - 4; x \geq 0$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \frac{3x}{1-x}$
b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$

54 Indica si las siguientes funciones son pares, impares o ni pares ni impares, y calcula su simetría:

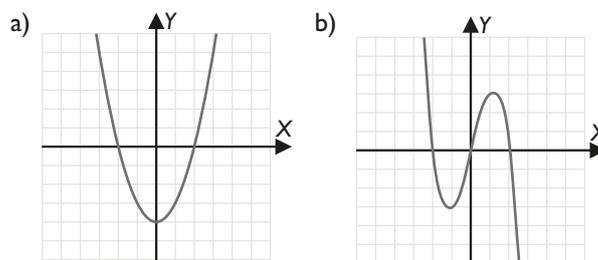
- a) $y = x$ b) $y = x + 3$
- c) $y = \frac{3}{x}$ d) $y = x^2 + 2$

Solución:

- a) Es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$
- b) No es par, ni impar.
- c) Es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$
- d) Es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

4. Funciones polinómicas

55 Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?



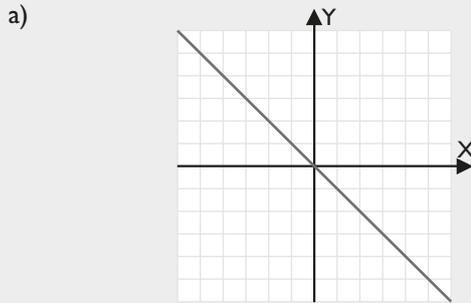
Solución:

- a) De 2.º grado. El coeficiente principal es positivo.
- b) De 3.º grado. El coeficiente principal es negativo.

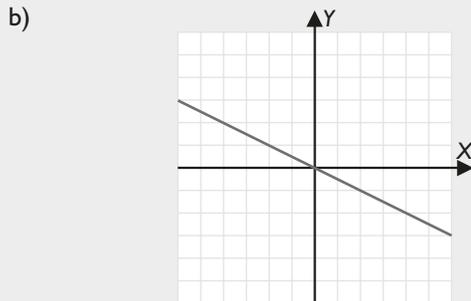
56 Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen.

- a) $y = -x$ b) $y = -\frac{x}{2}$
 c) $y = \frac{3x}{2} + 1$ d) $y = -2x - 1$

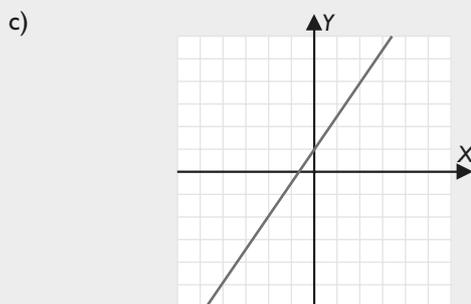
Solución:



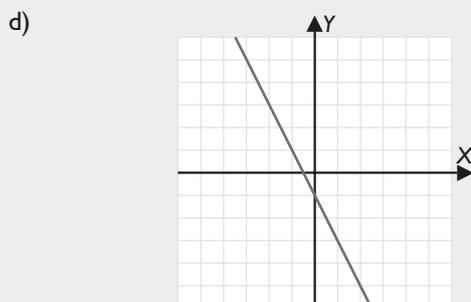
$m = -1$
 Ordenada en el origen: 0



$m = -\frac{1}{2}$
 Ordenada en el origen: 0

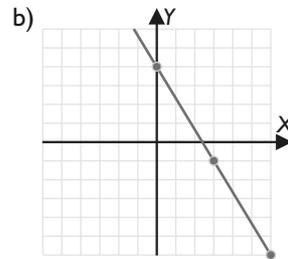
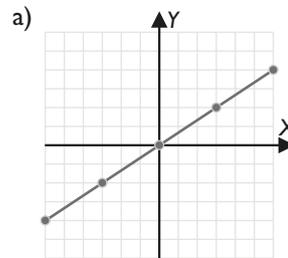


$m = \frac{3}{2}$
 Ordenada en el origen: 1



$m = -2$
 Ordenada en el origen: -1

57 Escribe las fórmulas de las siguientes rectas:



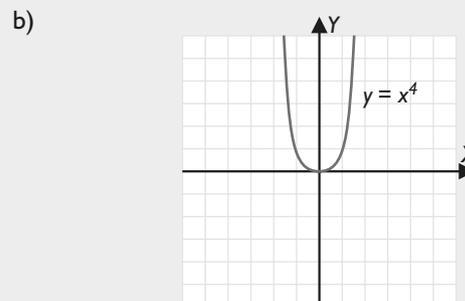
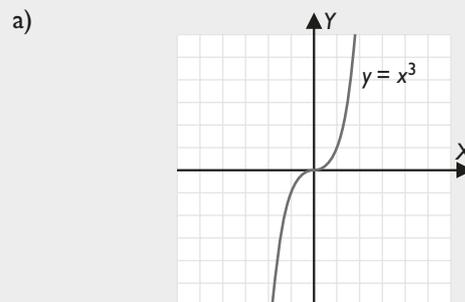
Solución:

- a) $y = \frac{2x}{3} + 1$
 b) $y = -\frac{5x}{3} + 4$

58 Haz un dibujo aproximado de las funciones siguientes:

- a) $y = x^3$ b) $y = x^4$

Solución:



5. Funciones cuadráticas

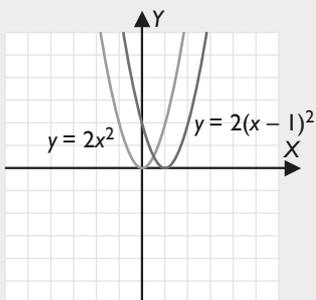
59 Representa la parábola $y = 2x^2$; a partir de ella, las siguientes:

- a) $y = 2(x - 1)^2$ b) $y = 2x^2 - 3$
 c) $y = 2(x + 2)^2$ d) $y = 2(x + 1)^2 + 2$

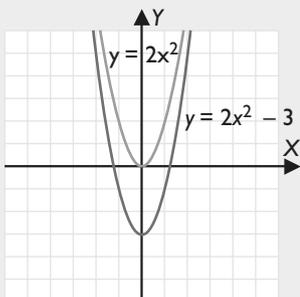
Ejercicios y problemas propuestos

Solución:

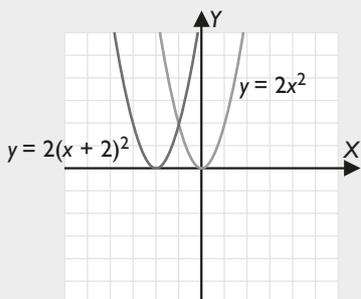
a)



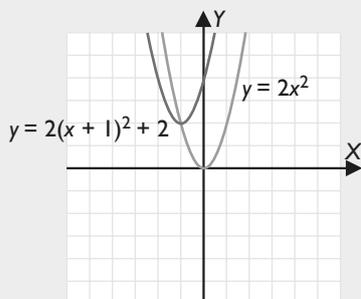
b)



c)



d)



60 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 4x + 2$

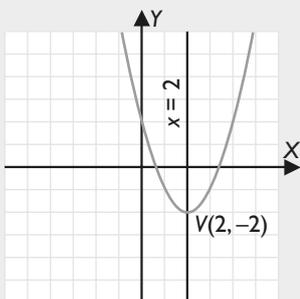
b) $y = -x^2 - 2x + 1$

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

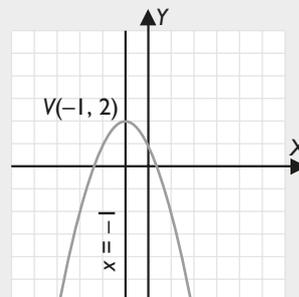
d) $y = -2x^2 + 4x + 3$

Solución:

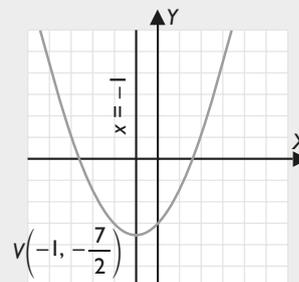
a)



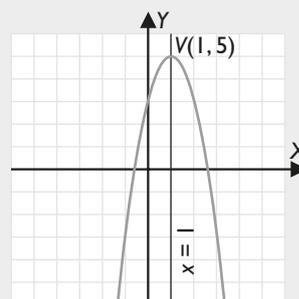
b)



c)

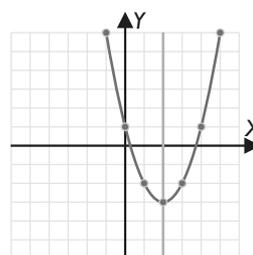


d)

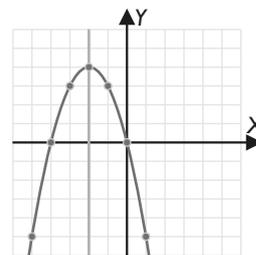


61 Escribe las fórmulas de las siguientes parábolas:

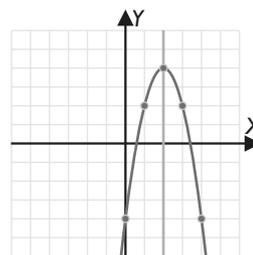
a)



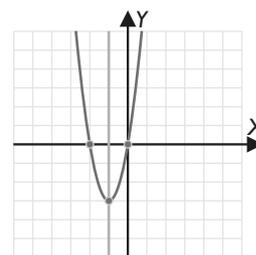
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 - 4x$

c) $y = -2x^2 + 8x - 4$

d) $y = 3x^2 + 6x$

6. Funciones racionales e irracionales

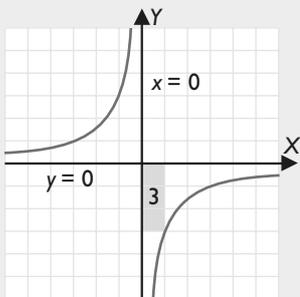
62 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante, k , de proporcionalidad inversa.

a) $y = -\frac{3}{x}$

b) $y = \frac{2}{x}$

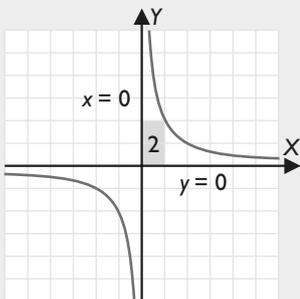
Solución:

a)



$k = -3$

b)



$k = 2$

63 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante k

a) $y = \frac{2x+2}{x}$

b) $y = \frac{3x+7}{x+2}$

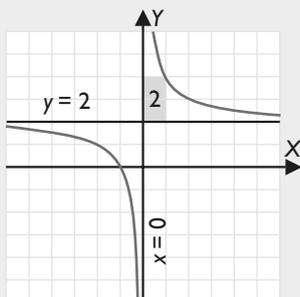
c) $y = \frac{-2x-6}{x+1}$

d) $y = \frac{-2x+3}{x}$

Solución:

a)

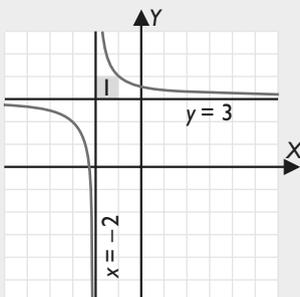
$y = \frac{2}{x} + 2$



$k = 2$

b)

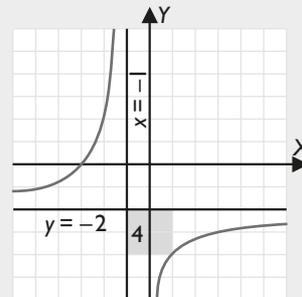
$y = \frac{1}{x+2} + 3$



$k = 1$

c)

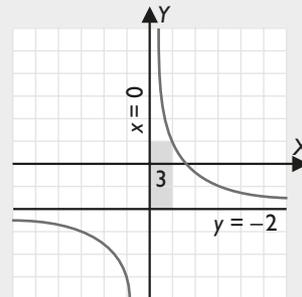
$y = \frac{-4}{x+1} - 2$



$k = -4$

d)

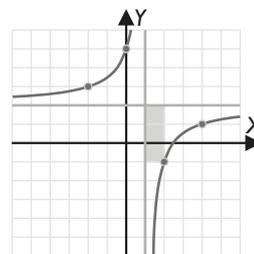
$y = \frac{3}{x} - 2$



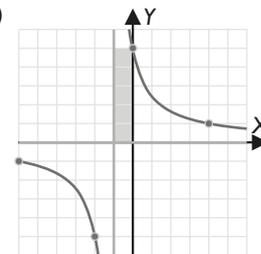
$k = 3$

64 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



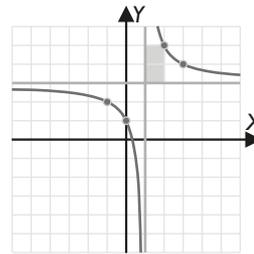
Solución:

a) $y = -\frac{3}{x-1} + 2$

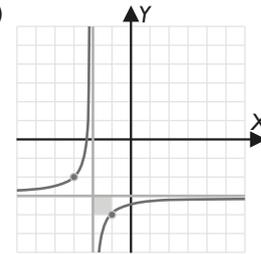
b) $y = \frac{5}{x+1}$

65 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



Solución:

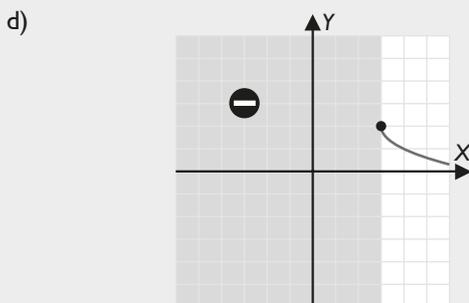
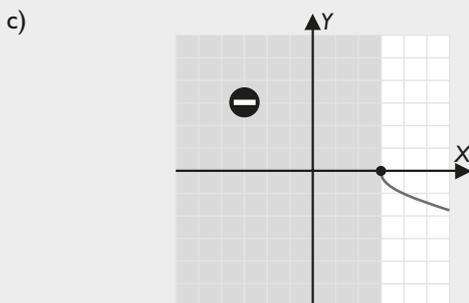
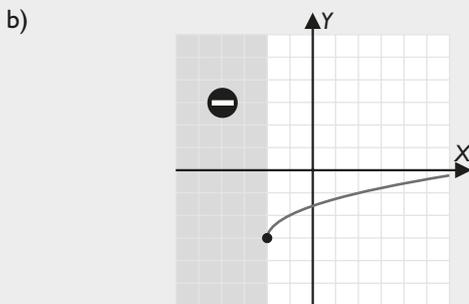
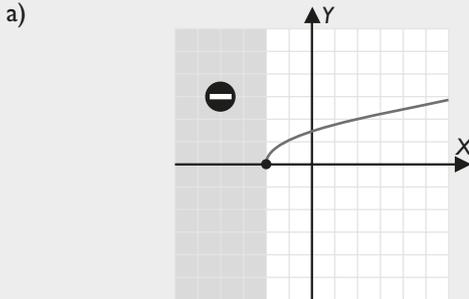
a) $y = \frac{2}{x-1} + 3$

b) $y = -\frac{1}{x+2} - 3$

66 Dibuja las siguientes funciones irracionales:

- a) $y = \sqrt{x+2}$ b) $y = -3 + \sqrt{x+2}$
 c) $y = -\sqrt{x-3}$ d) $y = 2 - \sqrt{x-3}$

Solución:



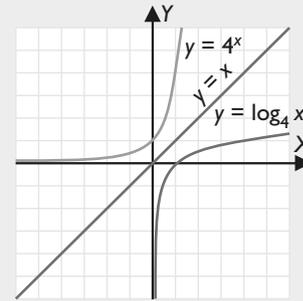
7. Funciones exponenciales y logarítmicas

67 Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a) $y = 4^x$ b) $y = \log_4 x$
 ¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:

Son simétricas respecto de la bisectriz del 1.º y 3.º cuadrantes; $y = x$; por tanto, una es inversa de la otra.



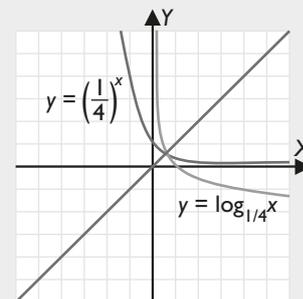
68 Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
 b) $y = \log_{1/4} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:

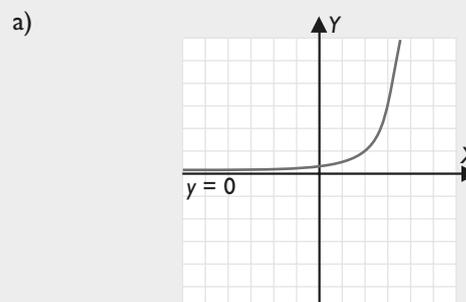
Son simétricas respecto de la bisectriz del 1.º y 3.º cuadrantes; $y = x$, por tanto, una es inversa de la otra.

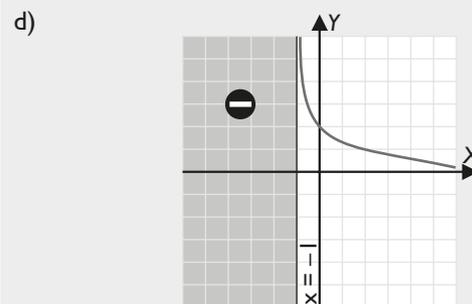
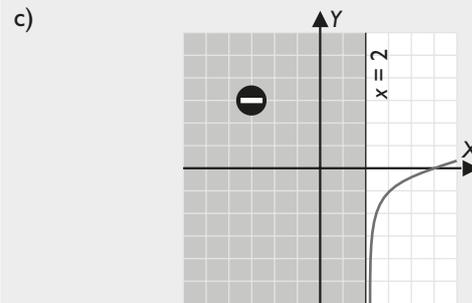
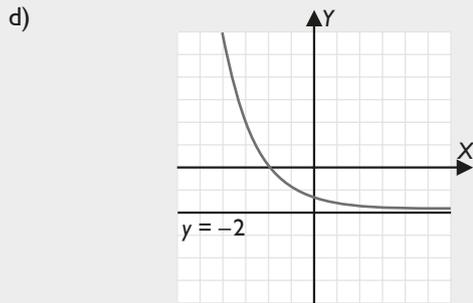
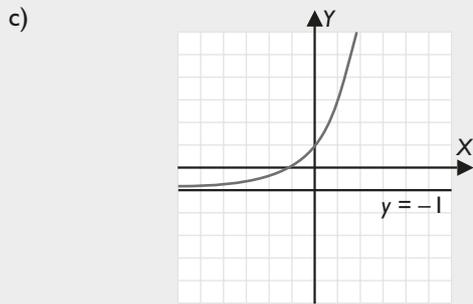
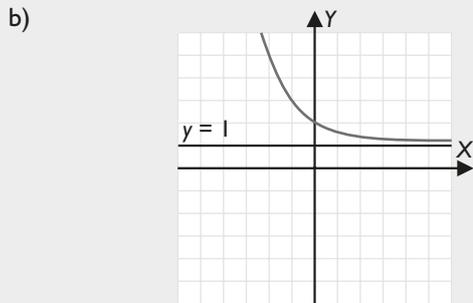


69 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a) $y = 3^{x-2}$
 b) $y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$
 c) $y = -1 + 2^{x+1}$
 d) $y = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

Solución:

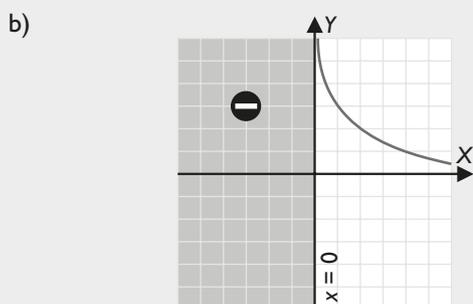
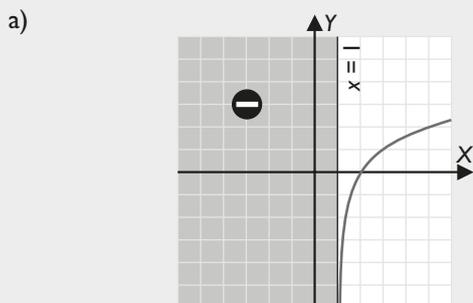




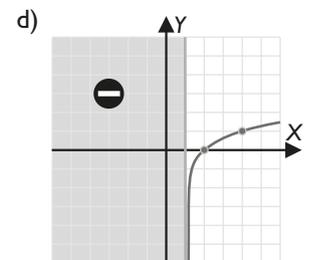
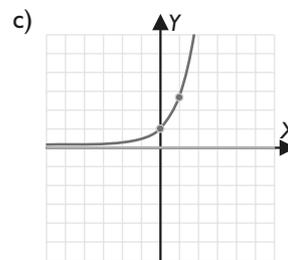
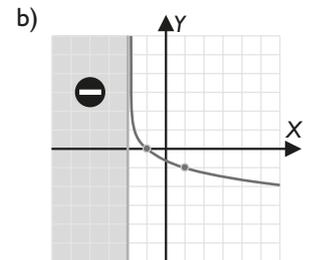
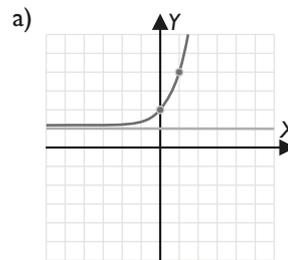
70 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a) $y = \log_2(x - 1)$ b) $y = 3 + \log_{1/2} x$
 c) $y = -1 + \log_3(x - 2)$ d) $y = 2 + \log_{1/3}(x + 1)$

Solución:



71 Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:



Solución:

- a) $y = 1 + 3^x$
 b) $y = \log_{1/3}(x + 2)$
 c) $y = e^x$
 d) $y = \log_3(x - 1)$

8. Funciones trigonométricas

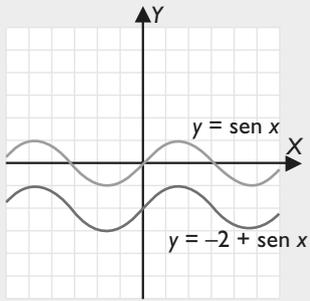
72 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{sen } x$

- a) $y = -2 + \text{sen } x$
 b) $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

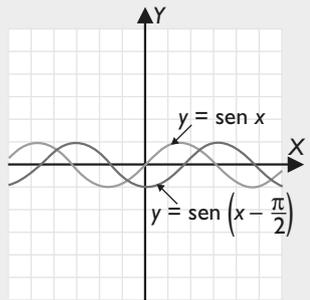
Ejercicios y problemas propuestos

Solución:

a)



b)



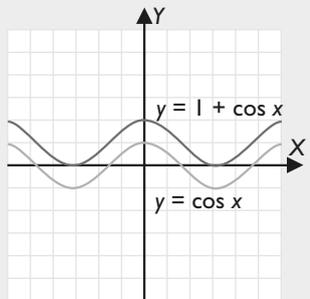
73 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \cos x$

a) $y = 1 + \cos x$

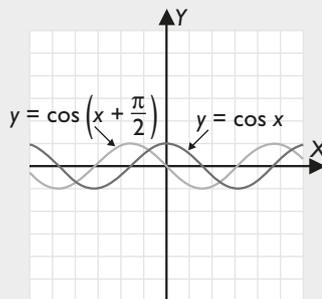
b) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

Solución:

a)



b)



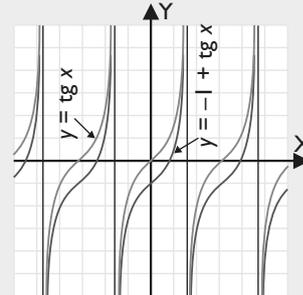
74 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{tg } x$

a) $y = -1 + \text{tg } x$

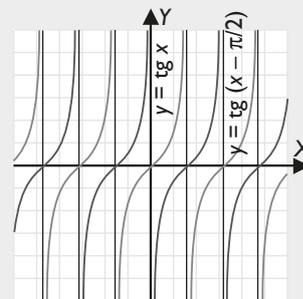
b) $y = \text{tg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

Solución:

a)



b)



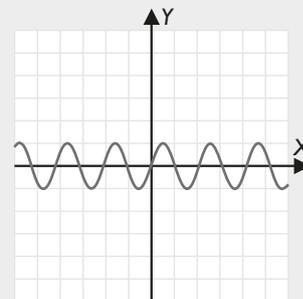
75 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen } 3x$

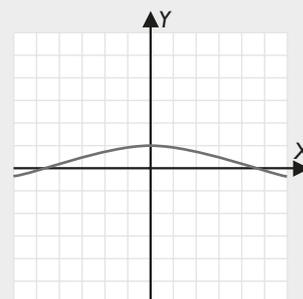
b) $y = \cos \frac{x}{3}$

Solución:

a)

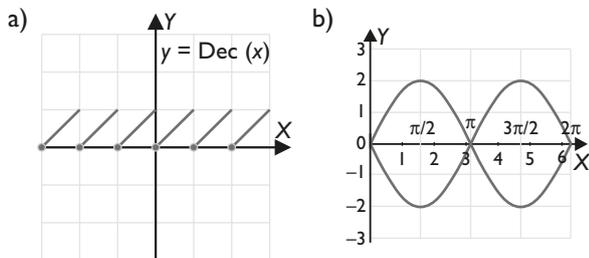


b)



Para ampliar

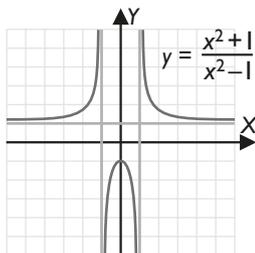
76 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:



Solución:

- a) Es función: $y = \text{Dec}(x)$
 b) No es función.

77 Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: no corta.
 - Eje Y: $A(0, -1)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -1)$
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 - Decreciente: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

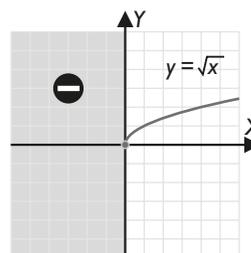
Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-1, 1)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

78 Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

- Tipo de función: irracional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$
- Continuidad: es continua en $[0, +\infty)$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica.
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente: $(0, +\infty)$
 - Decreciente: \emptyset
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): \emptyset
 - Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$
- Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

Ejercicios y problemas propuestos

79 Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2}{\sqrt{x-5}}$

b) $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (5, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

80 Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \frac{x+2}{x-3}$

b) $y = \ln \sqrt{x}$

c) $y = \text{sen} \frac{2}{x}$

d) $y = e^{\sqrt{x}}$

Solución:

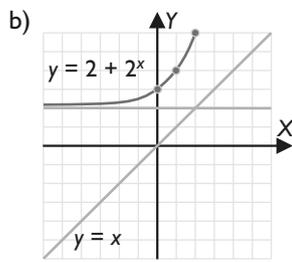
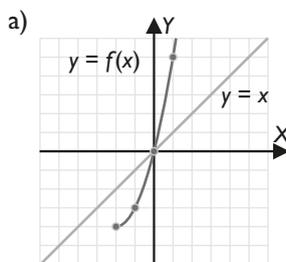
a) $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

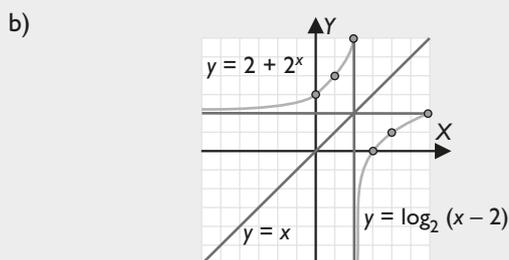
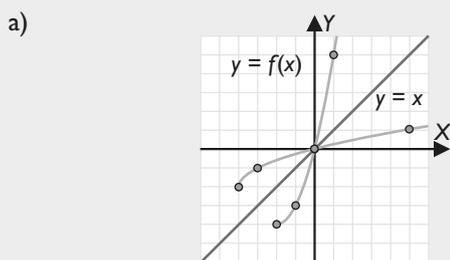
c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d) $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

81 Dibuja la función inversa de $y = f(x)$ en cada caso:



Solución:



82 Dadas las funciones $f(x) = \text{tg } x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) $f \circ f$

d) $g \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\text{tg } x}$

b) $(f \circ g)(x) = \text{tg} \frac{1}{x}$

c) $(f \circ f)(x) = \text{tg}(\text{tg } x)$

d) $(g \circ g)(x) = x$

83 Calcula la función inversa de la función $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = \sqrt{x+2}$

b) $y = x^2 - 5$

c) $y = \frac{x}{x-3}$

d) $y = \frac{x-2}{x-1}$

Solución:

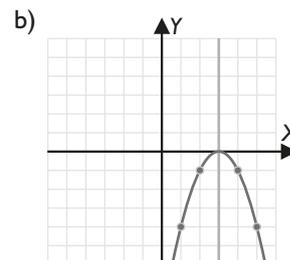
a) $y = x^2 - 2$ si $x \geq 0$

b) $y = \sqrt{x+5}$

c) $y = \frac{3x}{x-1}$

d) $y = \frac{x-2}{x-1}$

84 Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?



Solución:

a) Es de grado cuatro.

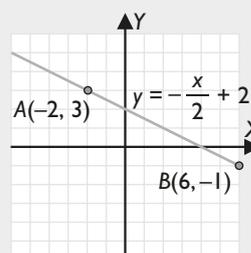
El coeficiente principal es negativo.

b) Es de grado dos.

El coeficiente principal es negativo.

85 Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(6, -1)$, y halla su fórmula.

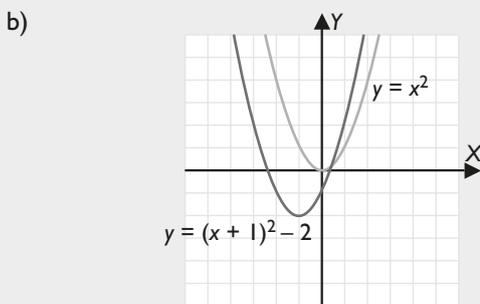
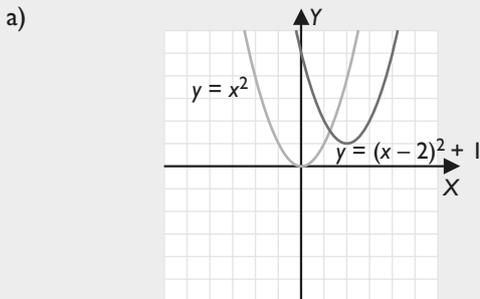
Solución:



86 Representa la parábola $f(x) = x^2$; a partir de ella, las siguientes funciones:

- a) $f(x - 2) + 1$
- b) $f(x + 1) - 2$

Solución:



87 Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

- a) $A(0, -1)$, $B(2, -5)$ y $C(5, 4)$
- b) $A(3, 4)$, $B(4, 2)$ y $C(1, -4)$

Solución:

- a) $y = x^2 - 4x - 1$
- b) $y = -2x^2 + 12x - 14$

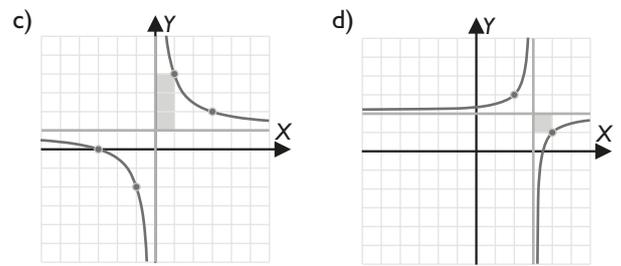
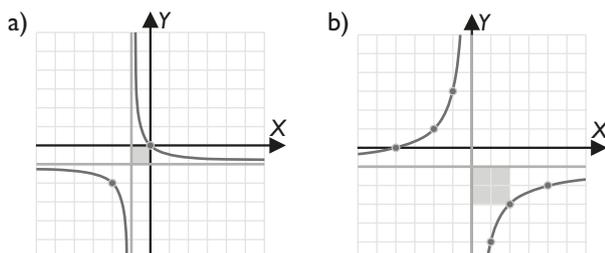
88 Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

- a) $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 4)$
- b) $A(-1, 2)$, $B(-3, -2)$ y $C(-5, 2)$

Solución:

- a) $y = x^2 - 4x + 4$
- b) $y = x^2 + 6x + 7$

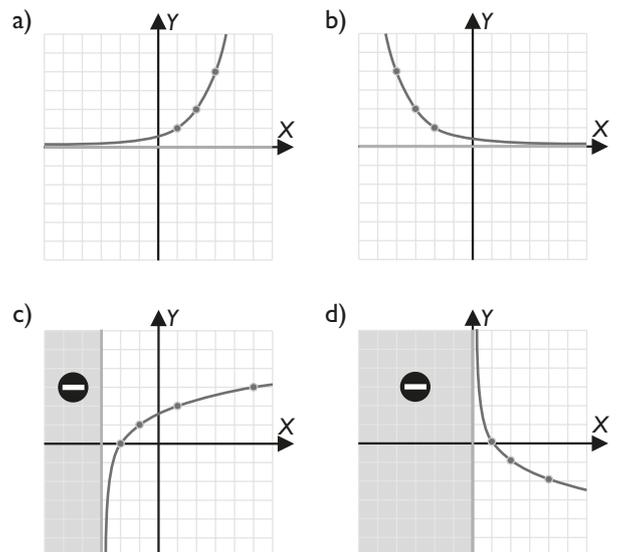
89 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:



Solución:

- a) $y = \frac{1}{x+1} - 1$
- b) $y = -\frac{4}{x} - 1$
- c) $y = \frac{3}{x} + 1$
- d) $y = -\frac{1}{x-3} + 2$

90 Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:



Solución:

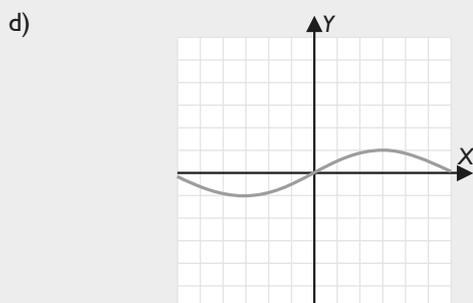
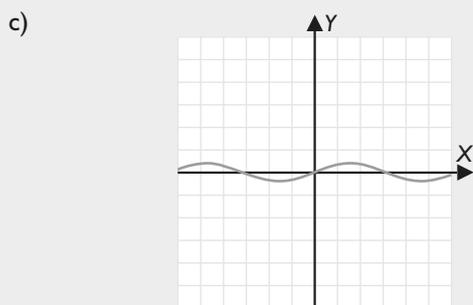
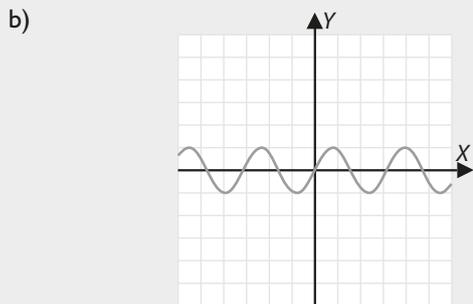
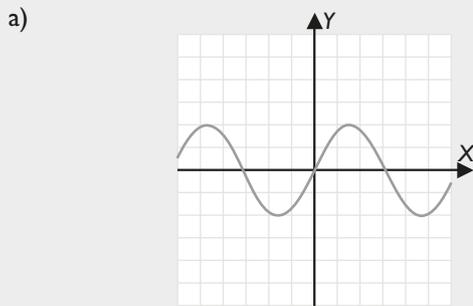
- a) $y = 2^{x-1}$
- b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
- c) $y = \log_2(x+3)$
- d) $y = \log_{1/2} x$

91 Dibuja las siguientes funciones:

- a) $y = 2 \text{ sen } x$
- b) $y = \text{sen } 2x$
- c) $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$
- d) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

Ejercicios y problemas propuestos

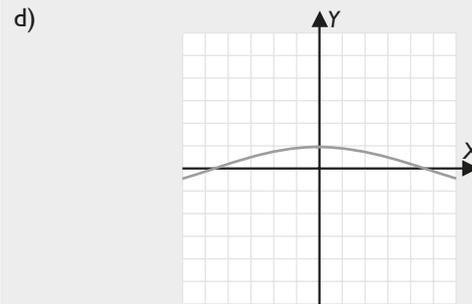
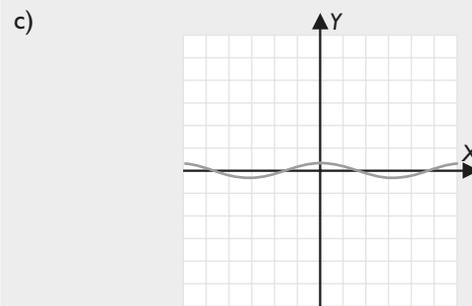
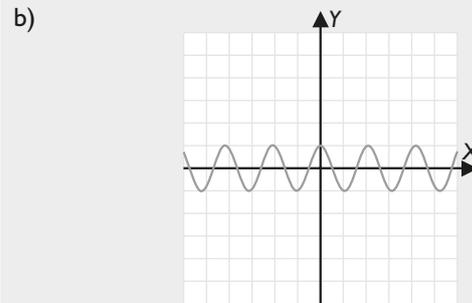
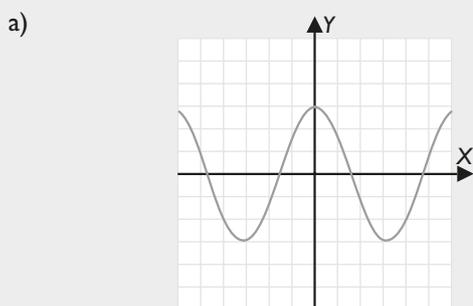
Solución:



92 Dibuja las siguientes funciones:

- a) $y = 3 \cos x$ b) $y = \cos 3x$
 c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ d) $y = \cos \frac{x}{3}$

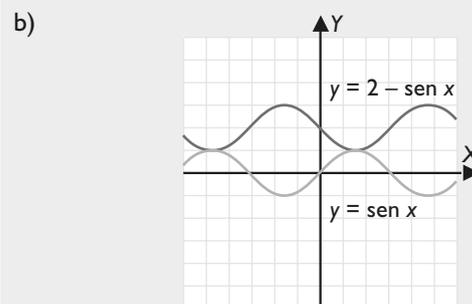
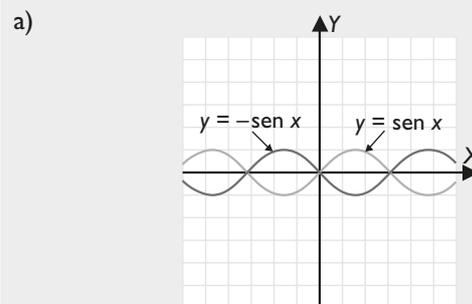
Solución:



93 Dibuja las siguientes funciones a partir de $y = \sin x$

- a) $y = -\sin x$
 b) $y = 2 - \sin x$

Solución:



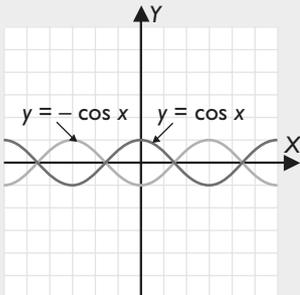
94 Dibuja las siguientes funciones a partir de $y = \cos x$

a) $y = -\cos x$

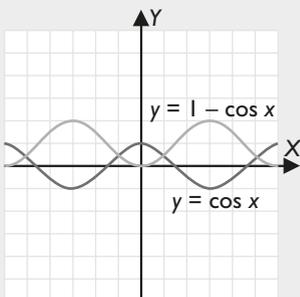
b) $y = 1 - \cos x$

Solución:

a)



b)



95 Dibuja las siguientes funciones:

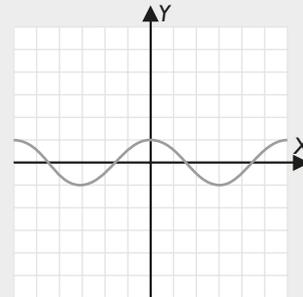
a) $y = \cos x$

b) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

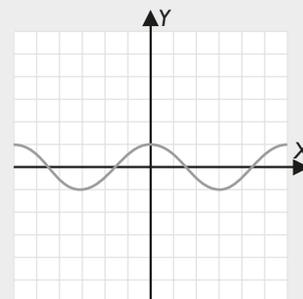
¿Qué observas?

Solución:

a)



b)

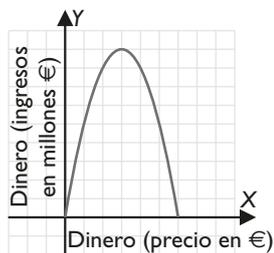


Se observa que son la misma gráfica, luego:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Problemas

96 En la gráfica adjunta se representan los ingresos en función del precio de cada cuaderno que fabrica una empresa y que se vende. Describe las características de la gráfica.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [0, 6]$
3. Continuidad: es continua en su dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: simétrica respecto a $x = 3$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

– Eje X: $O(0, 0)$ y $A(6, 0)$

– Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

– Positiva (+): $A(0, 6)$

8. Máximos y mínimos relativos:

a) Máximo relativo: $B(3, 9)$

Para 3 € se alcanzan unos ingresos de 9 millones.

b) Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

– Creciente: $(0, 3)$

– Decreciente: $(3, 6)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

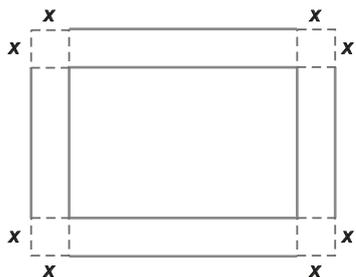
Curvatura:

– Cóncava (\cap): $(0, 6)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, 9]$$

- 97** En un cartón rectangular de 8 cm de largo por 6 cm de ancho, se cortan, en los vértices, cuatro cuadrados de x cm de lado para construir una caja. Escribe la función que da el volumen de dicha caja en función de la longitud x y calcula su dominio de definición.



Solución:

$$V(x) = (8 - 2x)(6 - 2x)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 28x^2 + 48x$$

$$\text{Dom}(V) = [0, 3]$$

- 98** El perímetro de un rectángulo mide 10 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado x de la base. Calcula el dominio de definición de la función.

Solución:

$$A(x) = x(5 - x)$$

$$A(x) = 5x - x^2$$

$$\text{Dom}(A) = [0, 5]$$

- 99** El precio de venta al público de una revista en función del número, en miles, de ejemplares editados, x , es

$$p(x) = 4 - \frac{x}{2}$$

Escribe la función de los ingresos que se obtienen, dependiendo de los ejemplares editados, y calcula el dominio de definición.

Solución:

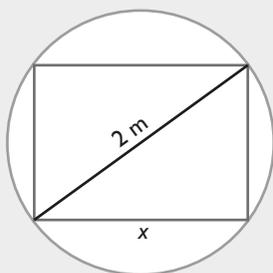
$$I(x) = x \cdot p(x) = x \left(4 - \frac{x}{2} \right)$$

$$I(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Dom}(I) = [0, 8]$$

- 100** Escribe una función que exprese el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de un metro de radio en función del lado x de la base. ¿Cuál es su dominio de definición?

Solución:



$$A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{Dom}(A) = [0, 2]$$

- 101** Dado un triángulo equilátero de lado x , define las funciones del perímetro y el área, en función del lado. Calcula sus dominios de definición.

Solución:

$$P(x) = 3x$$

$$\text{Dom}(P) = [0, +\infty)$$

$$A(x) = x \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$\text{Dom}(A) = [0, +\infty)$$

- 102** Halla la función que da la longitud del lado de un cuadrado en función del área y calcula su dominio.

Solución:

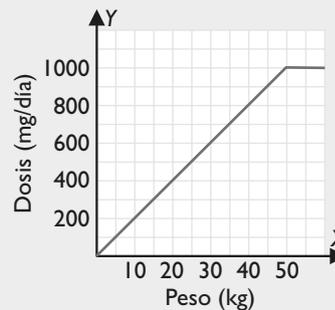
$$L(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{Dom}(L) = [0, +\infty)$$

- 103** La dosis habitual recomendada de un determinado antibiótico para niños es de 20 mg por kilogramo de peso al día, sin sobrepasar los 1000 mg al día. Escribe la función que da la cantidad de antibiótico que se debe suministrar en función del peso. Representa la gráfica.

Solución:

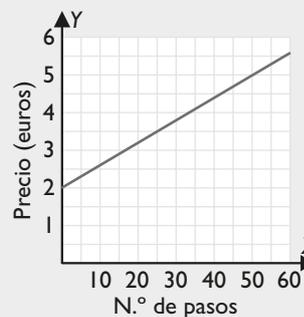
$$D(x) = \begin{cases} 20x & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 1000 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$



- 104** Un taxi cobra 2 € por bajada de bandera y 0,06 € por cada salto de contador. Escribe la fórmula de la función que da el precio de una carrera, en función de los saltos del contador, y representa su gráfica.

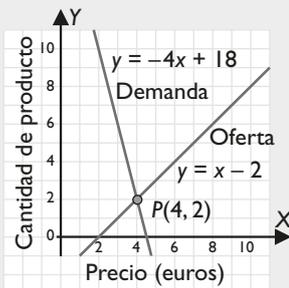
Solución:

$$D(x) = 2 + 0,06x$$



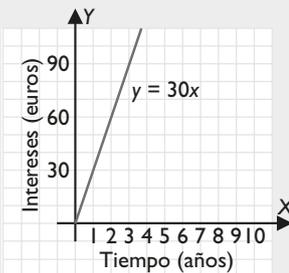
105 Una empresa ha realizado un estudio para determinar las funciones de oferta y de demanda de un producto en función del precio de venta, x . La función de oferta es $y = x - 2$, y la de demanda es $y = -4x + 18$. Representa dichas funciones y halla el punto de equilibrio.

Solución:



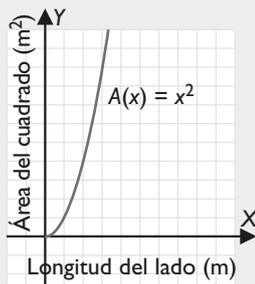
106 Se depositan 1 000 € a un 3% de interés simple durante un año. Escribe la fórmula que da los intereses en función del tiempo.

Solución:



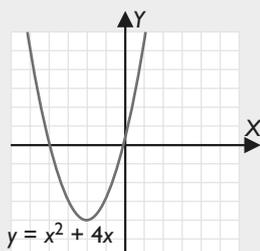
107 Halla el área de un cuadrado en función del lado. Representala gráficamente.

Solución:



108 Expresa la fórmula que da el producto de dos números que se diferencian en 4 unidades. Representa su gráfica.

Solución:



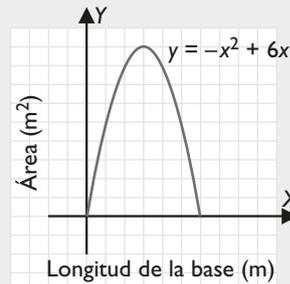
109 Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.

- Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado x
- Representa la función.
- Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

Solución:

a) $A(x) = x(6 - x) \Rightarrow A(x) = 6x - x^2$

b)



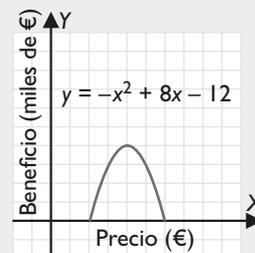
c) Un cuadrado de 3 m de lado con un área de 9 m²

110 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a x € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula $B(x) = -x^2 + 8x - 12$

- Representa la función $B(x)$
- Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:

a)



b) 4 €

111 Una máquina envasa un pedido de botes de mermelada en 8 horas. Se ponen varias máquinas idénticas a trabajar.

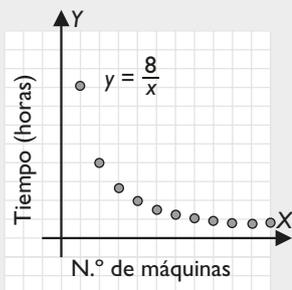
- Halla la función que expresa el tiempo de envasado en función del número de máquinas.
- Identifica la función obtenida.
- Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $y = \frac{8}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



112 Para recoger los higos de una finca, una persona dedica 60 horas.

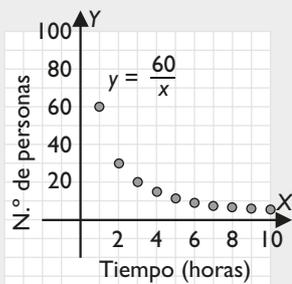
- Halla la función que expresa el número de personas en función del número de horas.
- Identifica la función obtenida.
- Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $y = \frac{60}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



113 Un cultivo de bacterias se reproduce de forma que el número de bacterias se duplica cada minuto. Expresa la función que representa el número de bacterias en función del tiempo.

Solución:

Suponiendo que inicialmente haya una bacteria y siendo x el tiempo en minutos: $y = 2^x$

114 Se deposita un capital de 6000 € al 10% anual, de manera que los intereses se acumulan al capital. Expresa la función que da el capital acumulado en función del tiempo.

Solución:

$$C = 6000 \cdot 1,1^t$$

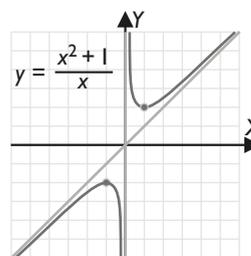
Para profundizar

115 Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x^2$ calcula $f \circ g \circ f$

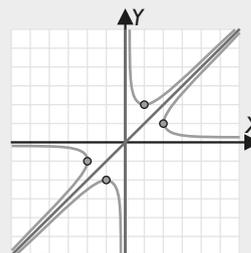
Solución:

$$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(\cos x) = f(\cos^2 x) = \cos(\cos^2 x)$$

116 Dada la gráfica de la función $y = \frac{x^2 + 1}{x}$, dibuja la inversa.



Solución:



No es función.

117 ¿Puede tener una función polinómica de cuarto grado solo un mínimo? Pon un ejemplo.

Solución:

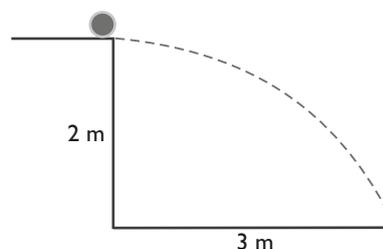
Sí, la función potencial: $y = x^4$

118 ¿Puede existir una función polinómica de tercer grado que no tenga ni máximo ni mínimo? Pon un ejemplo.

Solución:

Sí, la función potencial: $y = x^3$

119 Una pelota rueda desde una altura de 2 m y cae al suelo a 3 m de distancia. Calcula la fórmula de la curva que sigue al caer.



Solución:

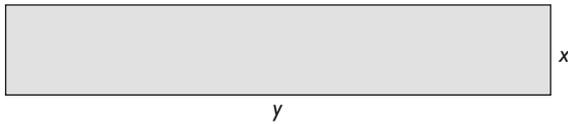
$$y = ax^2 + 2$$

Pasa por el punto $P(3, 0)$

$$9a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2x^2}{9} + 2$$

120 Un rectángulo tiene 6 m^2 de área.



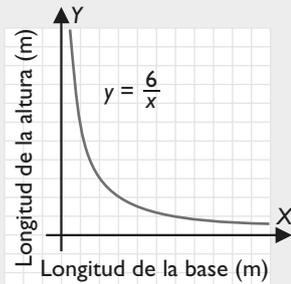
- Halla la función que expresa uno de los lados en función del otro.
- Identifica la función obtenida.
- Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $x \cdot y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



121 En un cuadrado de un metro de lado se unen los puntos medios, formando otro cuadrado. En este se vuelven a unir sus puntos medios para formar un tercer cuadrado, y así se repite el proceso indefinidamente.

- Expresa la fórmula que da el perímetro de los sucesivos cuadrados.
- Expresa la fórmula que da el área de los sucesivos cuadrados.

Solución:

a) Los lados de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego los perímetros serán:

$$P(n) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

b) Las áreas serán:

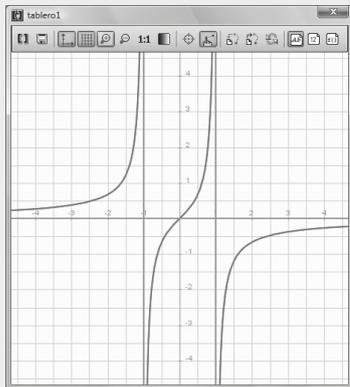
$$A(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Practica

Dibuja las siguientes funciones y completa los diez apartados del formulario:

124 $y = \frac{x}{1 - x^2}$

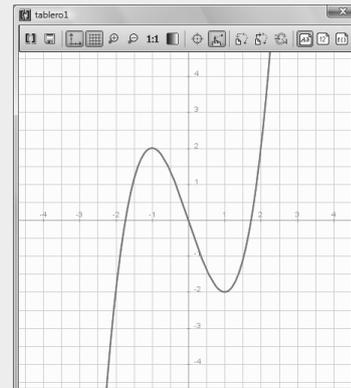
Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1, x = 1$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 - Negativa (-): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente: nunca.
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 - Cóncava (\cap): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

125 $y = x^3 - 3x$

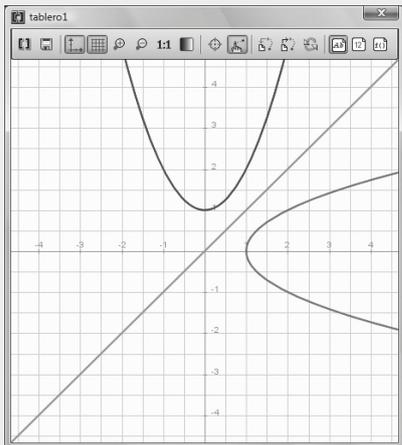
Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo \mathbb{R}
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $B(-\sqrt{3}, 0), O(0, 0), A(\sqrt{3}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - a) Máximo relativo: $C(-1, 2)$
 - b) Mínimo relativo: $D(1, -2)$
 Monotonía:
 - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Decreciente: $(-1, 1)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

126 Dibuja la función $y = x^2 + 1$, halla su inversa y representala. Dibuja la recta $y = x$; observa que la función inicial y su inversa son simétricas respecto de dicha recta. ¿La inversa es función?

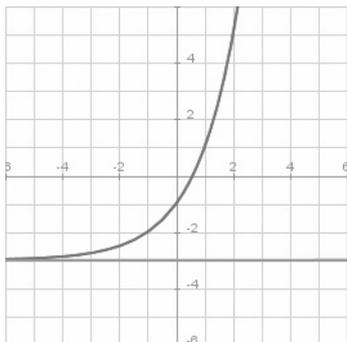
Solución:



La inversa no es función.

Identifica las siguientes gráficas y calcula mediante *ensayo-acierto* su fórmula:

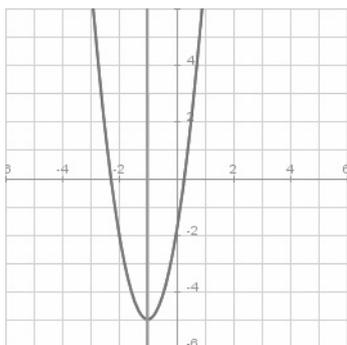
127



Solución:

Exponencial, $y = -3 + 2^{x+1}$

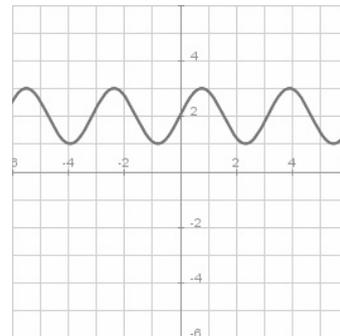
128



Solución:

Polinómica, $y = 3x^2 + 6x - 2$

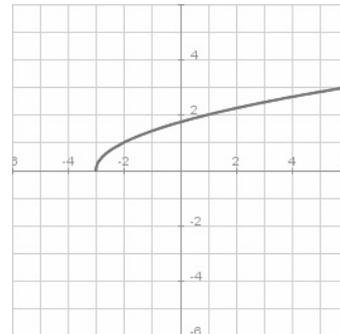
129



Solución:

Trigonómica, $y = 2 + \operatorname{sen} 3x$

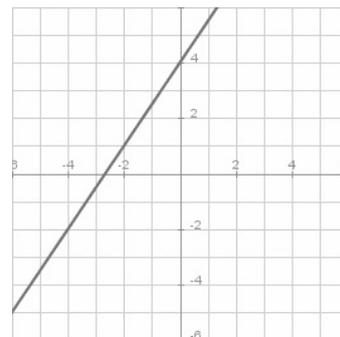
130



Solución:

Irrracional, $y = \sqrt{x+3}$

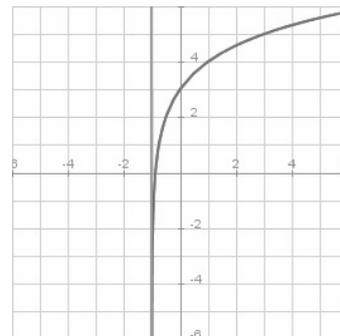
131



Solución:

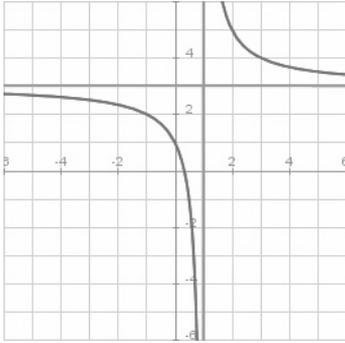
Polinómica, $y = \frac{3x}{2} + 4$

132

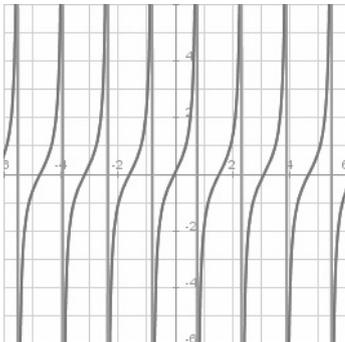


Solución:

Logarítmica, $y = 3 + \log_2(x+1)$

133**Solución:**

Racional, $y = \frac{2}{x-1} + 3$

134**Solución:**

Trigonométrica, $y = \operatorname{tg} 2x$

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris:

135 Halla la función que calcula el área de todos los rectángulos de perímetro 8 m

- Haz la representación gráfica.
- ¿Qué figura se obtiene?
- ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo cuando el área es máxima?

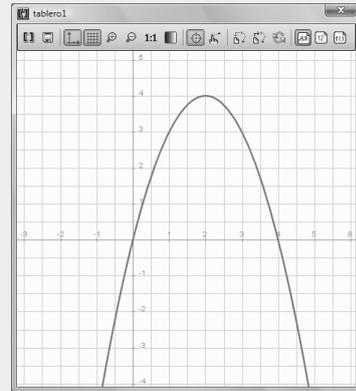
Solución:

Base x , altura $4 - x$

$$y = x(4 - x)$$

$$y = 4x - x^2$$

a)



b) Una parábola.

c) El rectángulo es un cuadrado de lado $x = 2$ m, y el área máxima mide 4 m^2