

# Unidad 1.

## Los números reales

### 1. Números racionales e irracionales

#### Piensa y calcula

Calcula mentalmente el volumen de un cubo de arista 2 m y escribe el valor exacto de la arista de un cubo de volumen  $2 \text{ m}^3$

**Solución:**

$$V = 2^3 = 8 \text{ m}^3 \quad a = \sqrt[3]{2} \text{ m}$$

#### Aplica la teoría

**1** Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a)  $\frac{5}{3}$     b)  $\pi$     c)  $\sqrt{2}$     d) 1,23456...

**Solución:**

- a) Racional.                      b) Irracional.  
c) Irracional.                    d) Irracional.

**2** Escribe cinco números racionales.

**Solución:**

$$9, -5, \frac{2}{3}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{8}$$

**3** Escribe cinco números irracionales.

**Solución:**

$$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[5]{7}, \pi, e$$

**4** Escribe tres números racionales comprendidos entre  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{2}$

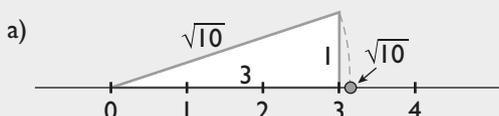
**Solución:**

$$\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{11}{24}$$

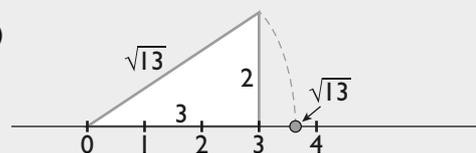
**5** Representa gráficamente, de forma exacta:

- a)  $\sqrt{10}$                               b)  $\sqrt{13}$

**Solución:**



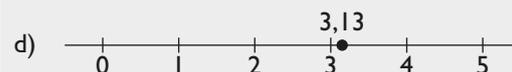
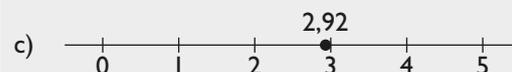
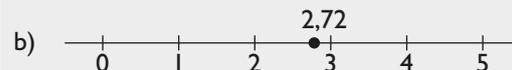
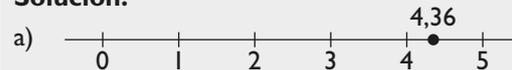
b)



**6** Representa gráficamente, de forma aproximada:

- a)  $\sqrt{19}$     b)  $e$     c)  $\sqrt[3]{25}$     d)  $\sqrt[5]{300}$

**Solución:**



**7** Calcula:

a)  $3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

b)  $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$

c)  $\frac{4}{3} : \left(\frac{8}{5} - 7\right)$

d)  $\frac{4}{3} \left(\frac{5}{6} - 2 + \frac{3}{8}\right)$

**Solución:**

- a)  $\frac{19}{6}$    b)  $\frac{25}{36}$    c)  $-\frac{20}{81}$    d)  $-\frac{19}{18}$

**8** Halla de forma exacta la diagonal de un cuadrado de lado  $l$  cm y escribe qué tipo de número es.

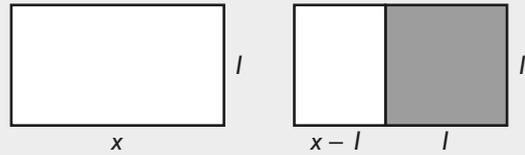
**Solución:**

$\sqrt{2}$  cm   Es un número irracional.

**9** Un rectángulo mide de largo  $x$  y de alto  $l$ ; por un lado le cortamos un cuadrado de lado  $l$ , y se obtiene un rectángulo semejante.

- a) ¿Cuánto mide  $x$ ?  
b) ¿Qué número conocido es  $x$ ?  
c) ¿ $x$  es racional o irracional?

**Solución:**



a)  $\frac{x}{l} = \frac{l}{x-l} \Rightarrow x = \frac{l + \sqrt{5}}{2}, x = \frac{l - \sqrt{5}}{2}$

La solución negativa  $x = \frac{l - \sqrt{5}}{2}$  no tiene sentido.

La solución es  $x = \frac{l + \sqrt{5}}{2}$

- b) Es el número áureo de oro.  
c) Es irracional.

## 2. La recta real

### Piensa y calcula

Representa en la recta real, de forma aproximada, los números  $3/4$  y  $\sqrt{7} = 2,64575131\dots$

**Solución:**

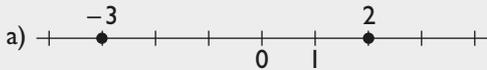


### Aplica la teoría

**10** Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

- a)  $-3$  y  $2$                       b)  $-2,5$  y  $3,7$

**Solución:**



$d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5$



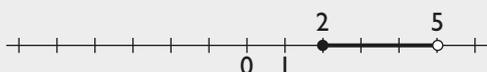
$d(-2,5; 3,7) = |3,7 - (-2,5)| = 6,2$

**11** Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

- a)  $[2, 5)$                       b)  $(-2, 1)$   
c)  $(-3, +\infty)$               d)  $(-\infty, 3]$

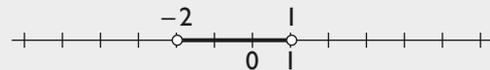
**Solución:**

a)  $\{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x < 5\}$



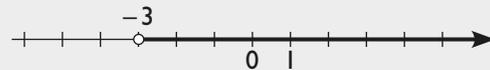
Intervalo semiabierto o semicerrado.

b)  $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$



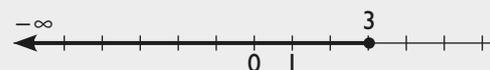
Intervalo abierto.

c)  $\{x \in \mathbb{R}; x > -3\}$



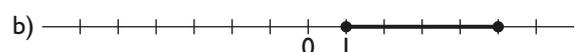
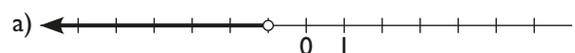
Semirrecta, intervalo abierto.

d)  $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$



Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

**12** Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos:



**Solución:**

- a)  $(-\infty, -1)$                       b)  $[1, 5]$



**20** Expresa en notación decimal los siguientes números:

- a)  $3,56 \cdot 10^9$                       b)  $1,23 \cdot 10^{-7}$   
 c)  $7,456 \cdot 10^5$                       d)  $9,99 \cdot 10^{-6}$

**Solución:**

- a) 3 560 000 000                      b) 0,000000123  
 c) 745 600                              d) 0,00000999

**21** Opera y expresa en notación científica:

- a)  $2,3 \cdot 10^{18} \cdot 7,42 \cdot 10^{-7}$   
 b)  $7,9 \cdot 10^8 : (3,5 \cdot 10^{-5})$

**Solución:**

- a)  $1,7066 \cdot 10^{12}$                       b)  $2,26 \cdot 10^{13}$

**22** Se define un año luz como la distancia que recorre la luz en un año. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, calcula los kilómetros a los que equivale un año luz y expresa el resultado en notación científica.

**Solución:**

$$300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9,4608 \cdot 10^{12}$$

## 4. Sucesiones de números reales

### Piensa y calcula

Escribe tres términos más en las siguientes sucesiones:

- a) 2, 6, 10, 14...                      b) 1, 2, 4, 8...                      c) 3, -3, 3, -3...                      d) 1, 1, 2, 3, 5...

**Solución:**

- a) 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26...                      b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...                      c) 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3...                      d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

### Aplica la teoría

**23** Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

- a) 3, 7, 11, 15...                      b) 5, 10, 20, 40...  
 c) 1, 4, 9, 16, 25...                      d) 1, -3, 5, -7, 9...

**Solución:**

- a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27...  
 b) 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320...  
 c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64...  
 d) 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15...

**24** Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a)  $a_n = 2^n$                                       b)  $a_n = 2n + 3$   
 c)  $a_n = (-1)^n (n + 1)$                       d)  $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Solución:**

- a) 2, 4, 8, 16                                      b) 5, 7, 9, 11  
 c) -2, 3, -4, 5                                      d)  $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$

**25** Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) 2, 4, 6, 8, 10...                      b) 1, 4, 9, 16, 25...

**Solución:**

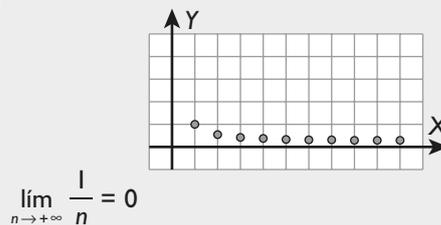
- a)  $a_n = 2n$                                       b)  $a_n = n^2$

**26** Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

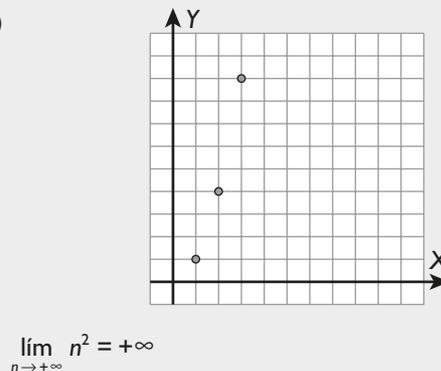
- a)  $a_n = \frac{1}{n}$                                       b)  $a_n = n^2$   
 c)  $a_n = \frac{2n + 1}{n}$                                       d)  $a_n = (-1)^n n$

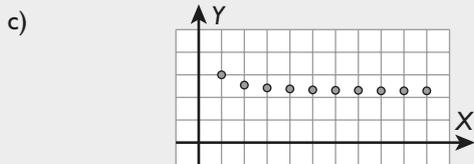
**Solución:**

a)

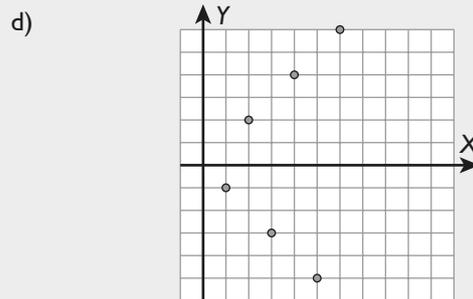


b)





$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$



No existe el  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n$

Los valores de la sucesión oscilan de negativo a positivo en cada término haciéndose cada vez más grandes en valor absoluto.

## 5. Radicales y operaciones

### Piensa y calcula

Halla mentalmente el valor de  $x$  en los siguientes casos:

a)  $\sqrt[3]{8} = x$

b)  $\sqrt[4]{x} = 10$

c)  $\sqrt[x]{32} = 2$

d)  $\sqrt[4]{81} = x$

**Solución:**

a)  $x = 2$

b)  $x = 10000$

c)  $x = 5$

d)  $x = \pm 3$

### Aplica la teoría

**27** Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

a)  $\sqrt[4]{16}$

b)  $\sqrt[3]{-125}$

c)  $\sqrt{-25}$

d)  $\sqrt[5]{32}$

**Solución:**

a)  $\pm 2$

b)  $-5$

c) No tiene solución real.

d)  $2$

**28** Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

a)  $7^{3/4}$

b)  $5^{-1/4}$

c)  $3^{-5/7}$

d)  $2^{1/3}$

**Solución:**

a)  $\sqrt[4]{7^3}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

c)  $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$

d)  $\sqrt[3]{2}$

**29** Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

a)  $\sqrt[7]{5^2}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[6]{11^5}}$

c)  $\sqrt[5]{3}$

d)  $\frac{1}{\sqrt[2]{2}}$

**Solución:**

a)  $5^{2/7}$

b)  $11^{-5/6}$

c)  $3^{1/5}$

d)  $2^{-1/3}$

**30** Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

a)  $\sqrt{18}$

b)  $\sqrt{20}$

c)  $\sqrt{27}$

d)  $\sqrt{72}$

**Solución:**

a)  $3\sqrt{2}$

b)  $2\sqrt{5}$

c)  $3\sqrt{3}$

d)  $6\sqrt{2}$

**31** Suma los siguientes radicales:

a)  $5\sqrt{8} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98}$

b)  $4\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{625} - 2\sqrt[3]{135}$

**Solución:**

a)  $7\sqrt{2}$

b)  $3\sqrt[3]{5}$

**32** Opera los siguientes radicales:

a)  $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{12}$

b)  $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{64}$

c)  $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6}$

d)  $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{16}$

**Solución:**

a)  $2\sqrt[3]{30}$

b)  $2\sqrt[5]{16}$

c)  $\sqrt[3]{2}$

d)  $\sqrt[5]{3/4}$

**33** Las expresiones que están como potencia pásalas a radical y las que están como radical pásalas a potencia:

a)  $(\sqrt[5]{7})^2$

b)  $\sqrt[3]{6^5}$

c)  $\sqrt[4]{5^3}$

d)  $(\sqrt[7]{5})^2$

**Solución:**

a)  $\sqrt[5]{7^2}$

b)  $(\sqrt[3]{6})^5$

c)  $(\sqrt[4]{5})^3$

d)  $\sqrt[7]{5^2}$

**34** Expresa con un solo radical las siguientes expresiones:

a)  $\sqrt{\sqrt{5}}$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

c)  $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

**Solución:**

a)  $\sqrt[4]{5}$

b)  $\sqrt{2}$

c)  $\sqrt[6]{7}$

d)  $\sqrt[12]{5}$

**35** Racionaliza las siguientes expresiones:

a)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$     b)  $\frac{7}{\sqrt[5]{13^3}}$     c)  $\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$     d)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

**Solución:**

a)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$     b)  $\frac{7\sqrt[5]{13^2}}{13}$

c)  $\frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$     d)  $7 - 4\sqrt{3}$

**36** Halla la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 5 m, 4 m y 3 m

**Solución:**

$\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ m}$

## 6. Logaritmos

### Piensa y calcula

Halla el valor de  $x$  en los siguientes casos:

a)  $2^3 = x$     b)  $x^3 = 125$     c)  $2^x = 32$     d)  $10^3 = x$     e)  $x^4 = 10\,000$     f)  $10^x = 1\,000\,000$

**Solución:**

a)  $x = 8$     b)  $x = 5$     c)  $x = 5$     d)  $x = 1\,000$     e)  $x = 10$     f)  $x = 6$

### Aplica la teoría

**37** Halla mentalmente el valor de  $x$  en los siguientes casos:

a)  $2^6 = x$     b)  $x^5 = 32$     c)  $2^x = 128$   
d)  $10^6 = x$     e)  $x^4 = 10\,000$     f)  $10^x = 1\,000$

**Solución:**

a)  $x = 64$     b)  $x = 2$   
c)  $x = 7$     d)  $x = 1\,000\,000$   
e)  $x = 10$     f)  $x = 3$

**38** Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a)  $\log_2 32$     b)  $\log_3 1$   
c)  $\log_5 \frac{1}{25}$     d)  $\log 100$

**Solución:**

a) 5    b) 0    c) -2    d) 2

**39** Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

a)  $\log_2 50$     b)  $\log_3 36$   
c)  $\log_5 98,75$     d)  $\log 5\,678,24$

**Solución:**

a) 5    b) 3    c) 2    d) 3

**40** Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos:

a)  $\log 725,263$     b)  $\log 0,00356$   
c)  $\ln 24,6845$     d)  $\ln 0,000765$

**Solución:**

a) 2,8605    b) -2,4486    c) 3,2062    d) -7,1756

**41** Sabiendo que  $\log 2 = 0,3010$  y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a)  $\log 4$     b)  $\log 5$     c)  $\log 8$     d)  $\log \sqrt{5}$

**Solución:**

a)  $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$   
b)  $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0,6990$   
c)  $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0,9030$   
d)  $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} 0,699 = 0,3495$

**42** Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla:

a)  $\log 2,5^{17}$     b)  $\log 0,0234^{-25}$   
c)  $\log \sqrt[5]{87,012}$     d)  $\log \sqrt[6]{0,0987}$

**Solución:**

a) 6,7650    b) 40,7696  
c) 0,3879    d) -0,1676

**43** Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a)  $\log_2 51,27$     b)  $\log_3 8,431$   
c)  $\log_5 0,034$     d)  $\log_7 1\,000$

**Solución:**

a) 5,6800    b) 1,9406  
c) -2,1010    d) 3,5499

# Ejercicios y problemas propuestos

## 1. Números racionales e irracionales

**44** Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a)  $\sqrt{3}$       b)  $\frac{3}{7}$       c)  $e$       d)  $\sqrt{25}$

**Solución:**

- a) Irracional.  
b) Racional.  
c) Irracional.  
d) Racional.

**45** Escribe tres números racionales comprendidos entre los siguientes:  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{3}{5}$

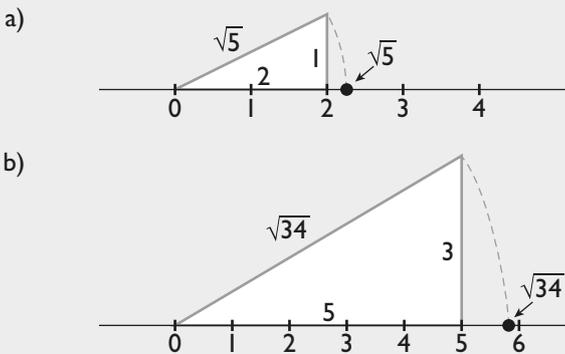
**Solución:**

$$\frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}$$

**46** Representa gráficamente de forma exacta:

- a)  $\sqrt{5}$   
b)  $\sqrt{34}$

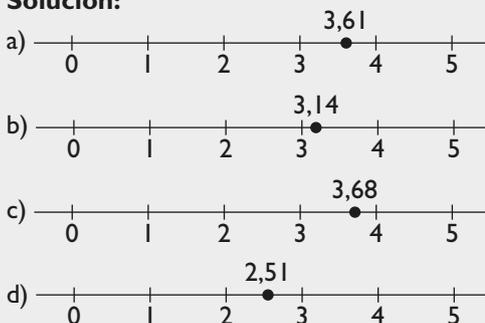
**Solución:**



**47** Representa gráficamente de forma aproximada:

- a)  $\sqrt{13}$       b)  $\pi$   
c)  $\sqrt[3]{50}$       d)  $\sqrt[5]{100}$

**Solución:**



**48** Calcula:

a)  $\frac{3}{4} : \left( \frac{1}{6} - 5 + \frac{1}{2} \right)$       b)  $\frac{5}{3} \left( \frac{1}{8} - 3 + \frac{13}{6} \right)$

**Solución:**

a)  $-\frac{9}{52}$       b)  $-\frac{85}{72}$

**49** Halla de forma exacta la arista de un cubo de volumen  $5 \text{ cm}^3$  y escribe qué tipo de número es.

**Solución:**

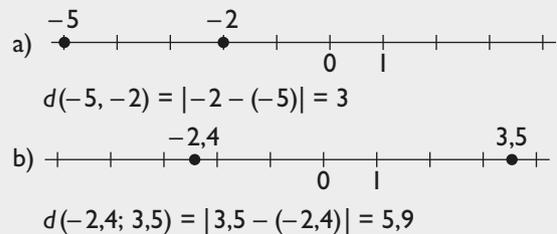
$\sqrt[3]{5} \text{ cm}$  es un número irracional.

## 2. La recta real

**50** Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

- a)  $-5$  y  $-2$       b)  $-2,4$  y  $3,5$

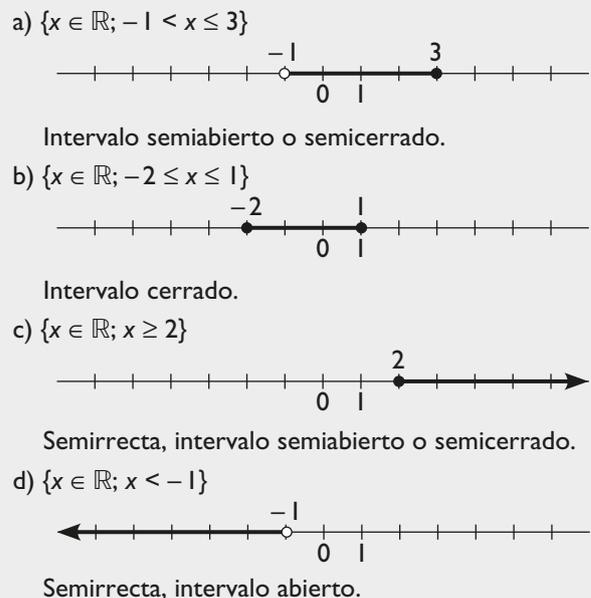
**Solución:**



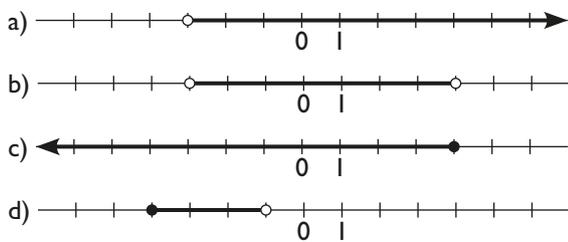
**51** Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

- a)  $(-1, 3]$       b)  $[-2, 1]$   
c)  $[2, +\infty)$       d)  $(-\infty, -1)$

**Solución:**



**52** Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:



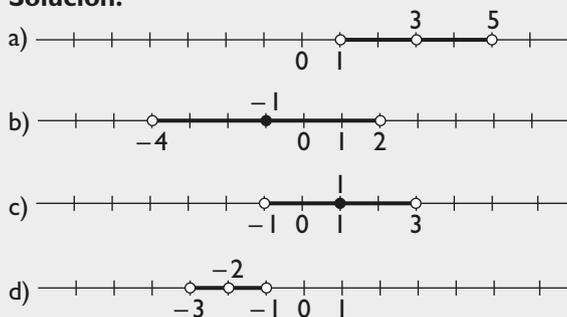
**Solución:**

- a)  $(-3, +\infty)$   
Semirrecta, intervalo abierto.  
b)  $(-3, 4)$   
Intervalo abierto.  
c)  $(-\infty, 1]$   
Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.  
d)  $[-4, -1)$   
Intervalo semiabierto o semicerrado.

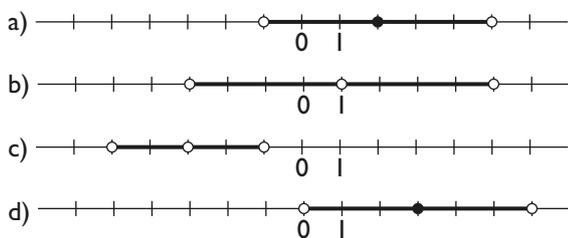
**53** Representa gráficamente los siguientes entornos:

- a)  $E^*(3, 2)$     b)  $E(-1, 3)$     c)  $E(1, 2)$     d)  $E^*(-2, 1)$

**Solución:**



**54** Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



**Solución:**

- a)  $E(2, 3)$     b)  $E^*(1, 4)$     c)  $E^*(-3, 2)$     d)  $E(3, 3)$

### 3. Aproximaciones y errores

**55** Redondea a dos cifras decimales y calcula la parte entera y decimal de los siguientes números:

- a)  $-4,67506$     b)  $\pi$   
c)  $\sqrt{2}$     d)  $-e$

**Solución:**

- a)  $-4,68$   
Parte entera:  $-5$     Parte decimal:  $0,32$   
b)  $3,14$   
Parte entera:  $3$     Parte decimal:  $0,14$   
c)  $1,41$   
Parte entera:  $1$     Parte decimal:  $0,41$   
d)  $-2,72$   
Parte entera:  $-3$     Parte decimal:  $0,28$

**56** Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

- a)  $\frac{43}{6}$     b)  $83,7967$   
c)  $\sqrt[5]{97}$     d)  $e$

**Solución:**

- a)  $7,17$ ; por exceso.    b)  $83,80$ ; por exceso.  
c)  $2,49$ ; por defecto.    d)  $2,72$ ; por exceso.

**57** Trunca a dos cifras decimales los siguientes números:

- a)  $\frac{43}{6}$     b)  $83,7967$     c)  $\sqrt[5]{97}$     d)  $e$

**Solución:**

- a)  $7,16$     b)  $83,79$     c)  $2,49$     d)  $2,71$

**58** Halla el error absoluto y relativo que se comete al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

- a)  $\frac{23}{11}$     b)  $\sqrt{7}$     c)  $e$     d)  $\sqrt[3]{86}$

**Solución:**

- a) Error absoluto:  $0,00091$     Error relativo:  $0,00043$   
b) Error absoluto:  $0,0042$     Error relativo:  $0,0016$   
c) Error absoluto:  $0,0017$     Error relativo:  $0,00063$   
d) Error absoluto:  $0,004$     Error relativo:  $0,00091$

**59** Expresa en notación científica los siguientes números:

- a)  $987\,600\,000$     b)  $567\,800\,000$   
c)  $0,00003902$     d)  $0,006783$

**Solución:**

- a)  $9,876 \cdot 10^8$     b)  $5,678 \cdot 10^8$   
c)  $3,902 \cdot 10^{-5}$     d)  $6,783 \cdot 10^{-3}$

**60** Expresa en notación decimal los siguientes números:

- a)  $9,845 \cdot 10^8$     b)  $5,44 \cdot 10^{-5}$   
c)  $3,2 \cdot 10^4$     d)  $7,087 \cdot 10^{-7}$

**Solución:**

- a)  $984\,500\,000$     b)  $0,0000544$   
c)  $32\,000$     d)  $0,0000007087$

**61** Opera y expresa el resultado en notación científica:

- a)  $3,4^{50}$   
 b)  $0,99^{1000}$   
 c)  $7,56 \cdot 10^{18} + 2,35 \cdot 10^{17}$   
 d)  $6,45 \cdot 10^{23} : (2,63 \cdot 10^{-15})$

**Solución:**

- a)  $3,75 \cdot 10^{26}$                       b)  $7,795 \cdot 10^{18}$   
 c)  $4,32 \cdot 10^{-5}$                       d)  $2,45 \cdot 10^{38}$

#### 4. Sucesiones de números reales

**62** Añade tres términos en cada una de las sucesiones:

- a) 5, -7, 9, -11, 13...    b) 2, 5, 10, 17...

**Solución:**

- a) 5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19...  
 b) 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50...

**63** Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a)  $a_n = 2n + 1$                       b)  $a_n = (-1)^n n(n + 1)$

**Solución:**

- a) 3, 5, 7, 9...                      b) -2, 6, -12, 20...

**64** Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) 1, 3, 5, 7, 9...                      b)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$ ...

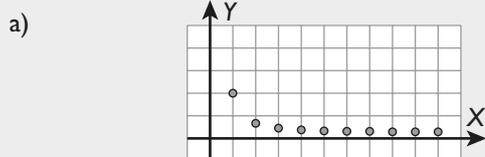
**Solución:**

- a)  $a_n = 2n - 1$                       b)  $a_n = \frac{1}{3n - 1}$

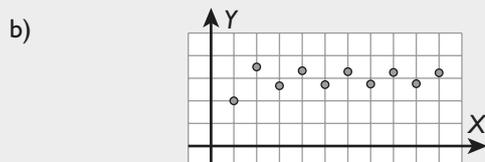
**65** Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a)  $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$                       b)  $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n}$

**Solución:**



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n^2} = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 + (-1)^n \frac{1}{n} \right) = 3$$

#### 5. Radicales y operaciones

**66** Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a)  $\sqrt[4]{625}$     b)  $\sqrt[4]{-81}$     c)  $\sqrt[7]{-128}$     d)  $\sqrt[5]{243}$

**Solución:**

- a)  $\pm 5$     b) No tiene solución real.    c) -2    d) 3

**67** Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a)  $5^{-2/3}$     b)  $3^{1/5}$     c)  $2^{3/4}$     d)  $7^{-1/5}$

**Solución:**

- a)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$     b)  $\sqrt[5]{3}$     c)  $\sqrt[4]{2^3}$     d)  $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$

**68** Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a)  $\sqrt[5]{7^3}$     b)  $\frac{1}{\sqrt[4]{11}}$     c)  $\sqrt[3]{5}$     d)  $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$

**Solución:**

- a)  $7^{3/5}$     b)  $11^{-1/4}$     c)  $5^{1/3}$     d)  $3^{-5/7}$

**69** Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a)  $\sqrt{32}$     b)  $\sqrt{45}$     c)  $\sqrt{50}$     d)  $\sqrt{75}$

**Solución:**

- a)  $4\sqrt{2}$     b)  $3\sqrt{5}$     c)  $5\sqrt{2}$     d)  $5\sqrt{3}$

**70** Suma los siguientes radicales:

- a)  $4\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$   
 b)  $5\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}$

**Solución:**

- a)  $3\sqrt{3}$                       b)  $\sqrt[3]{2}$

**71** Multiplica los siguientes radicales:

- a)  $\sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{24}$                       b)  $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{128}$

**Solución:**

- a)  $2\sqrt[4]{90}$                       b)  $2\sqrt[7]{2^4}$

**72** Divide los siguientes radicales:

- a)  $\sqrt[5]{40} : \sqrt[5]{5}$                       b)  $\sqrt[6]{24} : \sqrt[6]{36}$

**Solución:**

- a)  $\sqrt[5]{8}$                       b)  $\sqrt[6]{2/3}$

# Ejercicios y problemas propuestos

**73** Transforma los radicales siguientes. Los que están como potencia pásalos a radical y los que están como radical pásalos a potencia:

a)  $(\sqrt[3]{5})^2$     b)  $\sqrt[5]{7^2}$     c)  $\sqrt[7]{3^5}$     d)  $(\sqrt[11]{13})^5$

**Solución:**

a)  $\sqrt[3]{5^2}$     b)  $(\sqrt[5]{7})^2$     c)  $(\sqrt[7]{3})^5$     d)  $\sqrt[11]{13^5}$

**74** Expresa en forma de un solo radical las siguientes expresiones:

a)  $\sqrt{\sqrt{3}}$     b)  $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$     c)  $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$     d)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}$

**Solución:**

a)  $\sqrt[4]{3}$     b) 2    c)  $\sqrt[6]{5}$     d)  $\sqrt[12]{7}$

**75** Racionaliza las siguientes expresiones:

a)  $\frac{2}{\sqrt{7}}$     b)  $\frac{3}{\sqrt[3]{5^2}}$     c)  $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

**Solución:**

a)  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$     b)  $\frac{3\sqrt[3]{5^5}}{5}$     c)  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

## 6. Logaritmos

**76** Halla mentalmente el valor de  $x$  en los siguientes casos:

a)  $3^3 = x$     b)  $x^3 = 125$   
 c)  $3^x = 81$     d)  $10^3 = x$   
 e)  $x^2 = 100$     f)  $10^x = 1\,000\,000$

**Solución:**

a)  $x = 27$     b)  $x = 5$     c)  $x = 4$   
 d)  $x = 1\,000$     e)  $x = \pm 10$     f)  $x = 6$

## Para ampliar

**82** ¿Qué números enteros tienen inverso entero?

**Solución:**

El 1 y el -1; cada uno es inverso de sí mismo.

**83** Halla el opuesto y el inverso de:

a)  $\frac{2}{3}$     b) -5

**Solución:**

a) El opuesto es  $-2/3$  y el inverso es  $3/2$   
 b) El opuesto es 5 y el inverso es  $-1/5$

**77** Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a)  $\log_2 1$     b)  $\log_3 \frac{1}{9}$   
 c)  $\log_5 25$     d)  $\log 0,0001$

**Solución:**

a) 0    b) -2    c) 2    d) -4

**78** Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

a)  $\log_2 27$     b)  $\log_5 18,27$     c)  $\log 78,24$

**Solución:**

a) 4    b) 1    c) 1

**79** Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a)  $\log 86,233$     b)  $\log 0,0874$     c)  $\ln 765,023$

**Solución:**

a) 1,9357    b) -1,0585    c) 6,6399

**80** Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a)  $\log 5,7^{12}$     b)  $\log 0,567^{-15}$     c)  $\log \sqrt[4]{345,98}$

**Solución:**

a) 9,0705    b) 3,6963    c) 0,6348

**81** Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a)  $\log_2 7,3456$     b)  $\log_3 45,987$     c)  $\log_5 0,3054$     d)  $\log_7 0,056712$

**Solución:**

a) 2,8769    b) 3,4847    c) -0,7370    d) -1,4748

**84** Clasifica los números como racionales o irracionales:

a)  $5 - \sqrt{3}$     b)  $\frac{3}{7} - \frac{3}{5}$     c)  $\pi + e$     d)  $\sqrt[3]{-64}$

**Solución:**

a) Irrracional.    b) Racional.  
 c) Irrracional.    d) Racional.

**85** Escribe en forma de intervalo las desigualdades:

a)  $2 \leq x \leq 5$     b)  $x > 3$     c)  $x < 4$

**Solución:**

a) [2, 5]    b) (3, +∞)    c) (-∞, 4)

**86** Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

- a)  $|x - 2| < 3$     b)  $|x| < 2,5$     c)  $|x + 3| < 2$

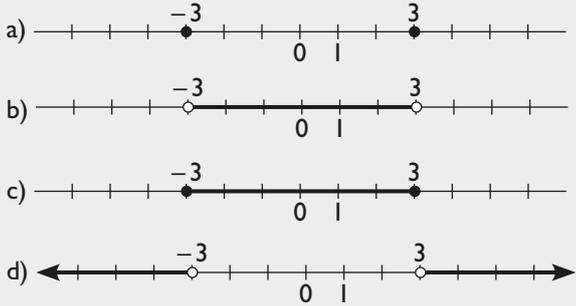
**Solución:**

- a)  $E(2, 3)$     b)  $E(0; 2,5)$     c)  $E(-3, 2)$

**87** Representa gráficamente los conjuntos dados por las siguientes expresiones:

- a)  $|x| = 3$     b)  $|x| < 3$     c)  $|x| \leq 3$     d)  $|x| > 3$

**Solución:**



**88** Suma los siguientes radicales:

- a)  $3a\sqrt{8a^3} - 5\sqrt{18a^5} + 7a\sqrt{50a^3}$   
 b)  $7\sqrt[3]{16x^8} + 5\sqrt[3]{54x^5} - 2\sqrt[3]{128x^2}$

**Solución:**

- a)  $26a^2\sqrt{2a}$   
 b)  $(14x^2 + 15x - 8)\sqrt[3]{2x^2}$

**89** Racionaliza las siguientes expresiones:

- a)  $\frac{a}{\sqrt{a}}$     b)  $\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}$     c)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$     d)  $\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$

**Solución:**

- a)  $\sqrt{a}$     b)  $\frac{b\sqrt[7]{a^5}}{a}$     c)  $\frac{a + \sqrt{ab}}{a - b}$     d)  $\frac{a^2 + 2a\sqrt{b} + b}{a^2 - b}$

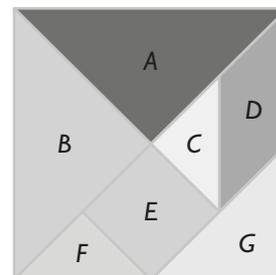
## Problemas

**95** Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de diámetro 1 m. ¿Qué clase de número es?

**Solución:**

$L = \pi$  m  
 Es un número irracional.

**96** La siguiente figura se conoce con el nombre de *tangram*. Si el lado del cuadrado mide 1 m, halla el área de cada una de las figuras que lo componen.



**90** Calcula, aplicando la fórmula de cambio de base, los siguientes logaritmos y redondea el resultado a cuatro decimales:

- a)  $\log_{1/2} 15,87$   
 b)  $\log_{1/3} 345,769$   
 c)  $\log_{1/5} 0,0006$

**Solución:**

- a)  $-3,9882$     b)  $-5,3211$     c)  $4,6094$

## Con calculadora

**91** Halla con la calculadora el valor de los siguientes números redondeando a 5 cifras:

- a)  $\pi$     b)  $e$     c)  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$     d)  $\sqrt[3]{5}$

**Solución:**

- a) 3,14159    b) 2,71828    c) 1,61803    d) 1,25850

**92** Halla el valor de los siguientes resultados y redondea el resultado a cinco decimales:

- a)  $1,000001^{1000000}$     b)  $0,999999^{1000000}$

**Solución:**

- a) 2,71828    b) 0,36788

**93** Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos; redondea los resultados a cuatro decimales:

- a)  $\log \pi$     b)  $\log e$     c)  $\ln \pi$     d)  $\ln 10$

**Solución:**

- a) 0,4971    b) 0,4343    c) 1,1447    d) 2,3026

**94** Utilizando la calculadora, halla:

- a)  $\pi^\pi$     b)  $e^e$     c)  $\pi^e$     d)  $e^\pi$

**Solución:**

- a) 36,4622    b) 15,1543    c) 22,4592    d) 23,1407

# Ejercicios y problemas propuestos

**97** Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número  $\pi$

**Solución:**

(3, 4)

**98** La longitud de una finca rectangular es 15 m y el perímetro es inferior a 50 m. ¿Qué valores puede tomar el ancho de la finca?

**Solución:**

$$2x + 30 \leq 50 \Rightarrow 0 < x \leq 10$$

**99** Si tomamos como valor de  $\pi$  al dado por Arquímedes de 22/7, ¿qué error absoluto y relativo estamos cometiendo?

**Solución:**

Error absoluto: 0,0013      Error relativo: 0,0004

**100** Calcula las siguientes potencias redondeando los resultados a cinco decimales. ¿A qué número real muy conocido se aproximan los valores que se van obteniendo?

- a)  $1,1^{10}$                       b)  $1,01^{100}$   
c)  $1,001^{1000}$                 d)  $1,0001^{10000}$   
e)  $1,00001^{100000}$          f)  $1,000001^{1000000}$

**Solución:**

- a) 2,59374                      b) 2,70481                      c) 2,71692  
d) 2,71815                      e) 2,71827                      f) 2,71828

Se aproximan hacia el número e

**101** Se construye un recipiente de un litro para envasar leche. Si el envase tiene forma de prisma rectangular de medidas 9,6 cm  $\times$  6,3 cm  $\times$  16,6 cm, ¿qué error relativo estamos cometiendo?

**Solución:**

Volumen:  $9,6 \cdot 6,3 \cdot 16,6 = 1\,003,968 \text{ cm}^3 = 1,003968 \text{ L}$   
Error relativo: 0,003968

**102** Halla la fórmula del área de un triángulo equilátero cuyo lado mide  $a$  cm

**Solución:**

$$\text{Área} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

**103** Halla la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide  $x$  m

**Solución:**

$$d = x\sqrt{2} \text{ m}$$

**104** Demuestra que el producto de dos números irracionales no es siempre irracional, resolviendo el siguiente contraejemplo: halla un número irracional que al multiplicarlo por el número irracional  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$  sea racional.

**Solución:**

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$$

**105** Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a  $\log 525$

**Solución:**

(2, 3)

**106** De dos números se sabe que  $\log x + \log y = 0$ . ¿Qué relación hay entre  $x$  e  $y$ ?

**Solución:**

$$\log xy = \log 1$$

$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Es decir, son inversos.

**107** Sabiendo que  $\log 5 = 0,6990$  y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- a)  $\log 2$     b)  $\log 25$   
c)  $\log 4$     d)  $\log \sqrt{5}$

**Solución:**

$$\text{a) } \log 2 = \log \frac{10}{5} = 1 - \log 5 = 0,3010$$

$$\text{b) } \log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 1,3980$$

$$\text{c) } \log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$$

$$\text{d) } \log \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2} = 0,3495$$

**108** Una célula se reproduce por bipartición cada hora. ¿Cuántos días tardará en sobrepasar el billón?

**Solución:**

$$2^x = 10^{12}$$

$$x \log 2 = 12$$

$$x = \frac{12}{\log 2} = 39,86$$

Tardará casi 2 días.

**109** Un coche deportivo cuesta 70 000 € y se devalúa cada año un 15 %. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 10 000 €?

**Solución:**

$$70\,000 \cdot 0,85^x = 10\,000$$

$$7 \cdot 0,85^x = 1$$

$$\log 7 + x \log 0,85 = 0$$

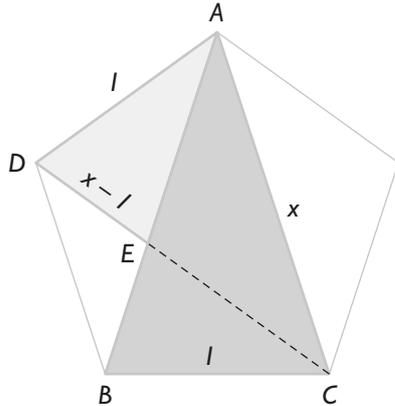
$$x \log 0,85 = -\log 7$$

$$x = -\frac{\log 7}{\log 0,85} = 11,97$$

Tardará casi 12 años.

## Para profundizar

**110** Sabiendo que los triángulos  $ABC$  y  $ADE$  son semejantes, calcula el valor de  $x$ . ¿Qué número conocido es  $x$ ? ¿Es racional o irracional?



**Solución:**

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  no sirve.

$$\text{La solución es } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Es el número áureo o de oro.

Es irracional.

**111** Los números racionales son densos. Veamos dos formas de demostrarlo:

- Halla la media aritmética entre  $2/3$  y  $4/5$ , comprueba que es racional y que está en el intervalo  $(2/3, 4/5)$
- Halla el número que se obtiene al sumar entre sí los numeradores y los denominadores de  $2/3$  y  $4/5$ , comprueba que es racional y que está en el intervalo  $(2/3, 4/5)$

**Solución:**

$$\text{a) } \frac{2}{3} = 0,6666666666 \quad \text{b) } \frac{2}{3} = 0,6666666666$$

$$\frac{11}{15} = 0,7333333333 \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\frac{4}{5} = 0,8 \quad \frac{4}{5} = 0,8$$

**112** Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número  $e$

**Solución:**

[2, 3]

**113** Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número áureo o de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**Solución:**

(1, 2)

**114** En informática  $1 \text{ Kb} = 2^{10}$  bytes, si se toma por aproximación  $1 \text{ Kb} = 1000$  bytes, ¿qué error absoluto y relativo estamos cometiendo?

**Solución:**

$$2^{10} = 1024$$

Error absoluto: 24

Error relativo: 0,023

**115** Si tomamos como valor de  $\pi$  el dado por Mélius de  $355/113$ , ¿qué error absoluto y relativo estamos cometiendo?

**Solución:**

Error absoluto: 0,00000027

Error relativo: 0,000000085

**116** Si para hallar la longitud del Ecuador se toma 6400 km como radio de la Tierra y 3,14 como valor de  $\pi$ , ¿qué error relativo estamos cometiendo, sabiendo que mide 40000 km?

**Solución:**

Longitud aproximada: 40192 km

Error absoluto: 192 km

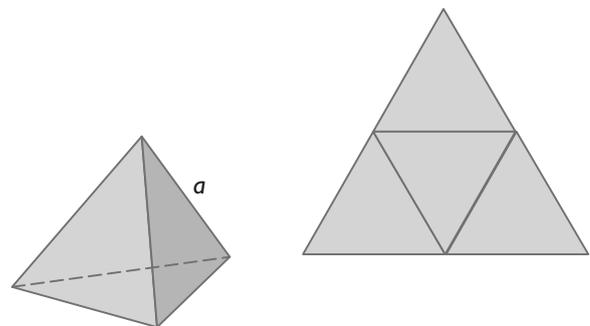
Error relativo: 0,0048

**117** La masa de la Tierra es  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg, y la del Sol,  $1,98 \cdot 10^{30}$  kg. ¿Cuántas veces es mayor la masa del Sol que la de la Tierra?

**Solución:**

$$1,98 \cdot 10^{30} : (5,98 \cdot 10^{24}) = 331\,103,68 \text{ veces}$$

**118** Halla la fórmula del área del siguiente tetraedro regular, cuya arista mide  $a$  cm

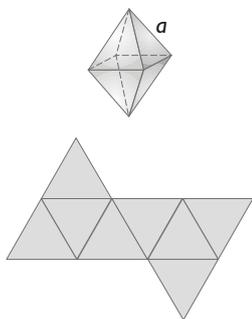


**Solución:**

$$A = a^2 \sqrt{3}$$

# Ejercicios y problemas propuestos

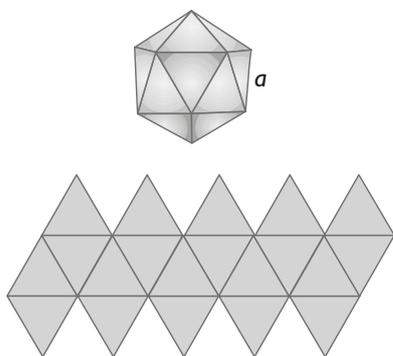
- 119** Halla la fórmula del área del siguiente octaedro regular, cuya arista mide  $a$  cm



**Solución:**

$$A = 2a^2 \sqrt{3}$$

- 120** Halla la fórmula del área del siguiente icosaedro regular, cuya arista mide  $a$  cm



**Solución:**

$$A = 5a^2 \sqrt{3}$$

- 121** Halla el volumen de un tetraedro cuya arista mide  $a$  cm

**Solución:**

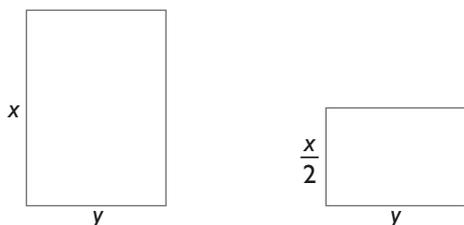
$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

- 122** Halla el volumen de un octaedro cuya arista mide  $a$  cm

**Solución:**

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

- 123** Un papel A0 mide  $1 \text{ m}^2$ , y cuando se corta a la mitad da origen a un A1 que tiene la particularidad de que es semejante al anterior.

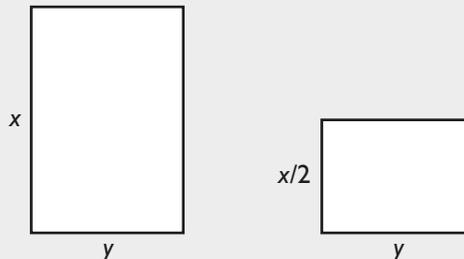


- a) Calcula de forma exacta la longitud y la anchura de un papel de formato A0

- b) Un A2 es la mitad de un A1, un A3 es la mitad de un A2, y un A4 es la mitad de un A3. Calcula de forma aproximada hasta los milímetros las dimensiones de un A4 (el A4 es el sustituto del folio, por la semejanza entre todos los A...; esta semejanza permite hacer fotocopias reduciendo o ampliando y manteniendo las proporciones del texto y/o dibujo y los márgenes).

**Solución:**

a)



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = y^2$$

$$\text{Además: } xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2$$

$$x = \sqrt[4]{2}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

b) 297 mm  $\times$  210 mm

- 124** Sabiendo que  $\log 3 = 0,4771$  y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- a)  $\log 30$       b)  $\log 900$       c)  $\log \sqrt[5]{270}$

**Solución:**

$$\text{a) } \log 30 = \log 3 \cdot 10 = \log 3 + \log 10 = 1,4771$$

$$\text{b) } \log 900 = \log 3^2 \cdot 100 = 2 \log 3 + \log 100 = 2,9542$$

$$\text{c) } \log \sqrt[5]{270} = \frac{\log (3^3 \cdot 10)}{5} = \frac{3 \log 3 + \log 10}{5} = 0,4863$$

- 125** Sabiendo que  $\log 45 = 1,6532$  y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- a)  $\log 4,5$   
b)  $\log \sqrt{45}$   
d)  $\log \sqrt[3]{4500}$

**Solución:**

$$\text{a) } \log 4,5 = 0,6532$$

$$\text{b) } \log \sqrt{45} = 0,8266$$

$$\text{c) } \log \sqrt[3]{4500} = \frac{3,6532}{3} = 1,2177$$

