Clasificación de sistemas

En la aplicación del método de Gauss pueden presentarse diversas situaciones que nos permitirán clasificar los sistemas según sus soluciones.

Comencemos estudiando qué ocurre cuando, al operar con las filas de la matriz ampliada asociada a un sistema, aparece una fila cuyos elementos son todos cero. Por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última fila corresponde a una ecuación de la forma:

$$0x + 0y + 0z = 0$$

que se cumple para cualquier valor que tomen las incógnitas, ya que el miembro de la izquierda es siempre 0.

En consecuencia, esta ecuación es irrelevante para la resolución del sistema, por lo que podremos suprimir la fila correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y continuar con la aplicación del método de Gauss.

De este modo, una vez eliminadas las filas nulas que se pudieran presentar, llegaremos a una de las tres situaciones recogidas en la siguiente tabla:

Un **sistema homogéneo** es siempre **compatible.**

Además, en el caso que sea **compatible determinado,** su solución es la n-tupla:

$$(0, 0, \ldots, 0)$$

Esta n-tupla recibe el nombre de **solución trivial.**

Sistema incompatible	**Sistema compatible**	
	Determinado	**Indeterminado**
Al operar con las filas de la matriz ampliada aparece una fila cuyos elementos son *todos cero, excepto el correspondiente al término independiente.* Por ejemplo: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ La última fila de la matriz corresponde a la ecuación: $0x + 0y + 0z = 3$ Esta ecuación no tiene solución, ya que el miembro de la izquierda es siempre 0, independientemente del valor de las incógnitas. En este caso el sistema es **incompatible.**	Al operar con las filas de la matriz ampliada se llega a una matriz escalonada equivalente asociada a un sistema con *igual número de ecuaciones que de incógnitas.* Por ejemplo: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ El sistema asociado a la matriz puede resolverse por sustitución regresiva y tiene una única solución. En este caso el sistema es **compatible determinado.**	Al operar con las filas de la matriz ampliada se llega a una matriz escalonada equivalente asociada a un sistema con *más incógnitas que ecuaciones.* Por ejemplo: $\left(\begin{array}{cccc\|c} -3 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right)$ El sistema asociado a la matriz tiene infinitas soluciones. En este caso el sistema es **compatible indeterminado.**