1 Números reales

1. Ordena de mayor a menor las siguientes expresiones decimales:

a) $0{,}26,\ 0{,}2\widehat{6},\ 0{,}\widehat{26},\ 0{,}26\widehat{9}$

b) $-0{,}0\widehat{3},\ -0{,}035,\ -0{,}03\widehat{2},\ -0{,}0\widehat{32}$

c) $1{,}57,\ 1{,}569,\ 1{,}56$

2. Expresa como producto de potencias la siguiente expresión:

$$\frac{(a \cdot b^2 \cdot c^{-3})^{-2}}{a^{-2} \cdot b^{-3} \cdot c^{-6}}$$

3. Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{2^3 - 2^{-2} \cdot 2^6}{2^3} \quad \text{y} \quad \frac{3^4 - \sqrt{625}}{2^3}$$

Hacia el año 2000 a. C., los egipcios tomaban 256/81 como valor aproximado de π. Varios siglos más tarde, utilizando el cálculo de perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en una circunferencia, Arquímedes (siglo III a. C.) estimó que π era un número comprendido entre 223/71 y 22/7.

Tsu Chung Chich (siglo V d. C.) realizó, mediante métodos geométricos, una aproximación de π con 6 cifras decimales exactas.

A finales del siglo XIX, y recurriendo esta vez a métodos aritméticos, se consiguió una aproximación a π de 707 cifras decimales exactas.

Actualmente, gracias a la capacidad de cálculo de los ordenadores, se ha logrado determinar una aproximación de π con aproximadamente 500 millones de cifras decimales.

En esta unidad, además del número π, se tratan otros números llamados irracionales que, junto con los racionales, constituyen el conjunto de los números reales.

1 Números y expresiones decimales

1.1. Los números racionales

El conjunto de los **números racionales** está constituido por los números enteros y los números fraccionarios. Por tanto, cualquier número que pueda expresarse en forma de fracción es racional.

Toda fracción da lugar a un número decimal limitado o a un número decimal ilimitado periódico. Por tanto, un número decimal es **racional** si, y solo si, es limitado o periódico. El conjunto de los números racionales está designado por $\mathbb{Q}$.

Por ejemplo:

- $27/4 = 6{,}75$ es decimal limitado.
- $56/33 = 1{,}\widehat{69}$ es decimal periódico puro.
- $-91/12 = -7{,}58\widehat{3}$ es decimal periódico mixto.

Todas estas expresiones decimales son ejemplos de números racionales.

Los números racionales se pueden **representar gráficamente** sobre una recta en la que se han determinado un origen y una unidad.

Así, para representar el número decimal 3,47, hacemos lo siguiente:

Dado que $3{,}47 = 3 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{7}{100}$, se divide sucesivamente la unidad en 10 y 100 partes iguales. Se toman 3 unidades, 4 décimas y 7 centésimas, y se señala el punto correspondiente al número:

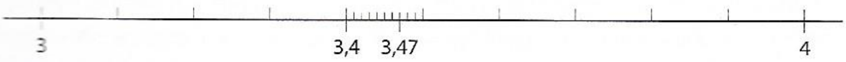

FIGURA 1.1.

Teóricamente, cualquier número racional se puede representar sobre la recta graduada pero, en la práctica, a menudo resulta imposible. Por ejemplo, es extraordinariamente difícil representar $-2{,}7645$ o $3{,}\widehat{61}$.

Ejemplo

a) *Representar el número decimal periódico* $1{,}\widehat{6}$.

Se escribe el número en forma de fracción: $1{,}\widehat{6} = 5/3$.

Puesto que $5/3 = 1 + 2/3$, se señala en una recta graduada el punto 1 y se traza una recta auxiliar con una cierta inclinación, la que se desee, que parta de dicho punto (figura 1.2).

Con el compás, se marcan sobre la recta auxiliar tres divisiones iguales. Se une mediante un segmento el punto que determina la tercera división con el que determina el número 2.

Basándonos en el teorema de Tales, se traza una paralela al segmento anterior que pase por el punto que determina la segunda división de la recta auxiliar. El punto de intersección de esta paralela con la recta graduada representa el valor $1{,}\widehat{6}$.

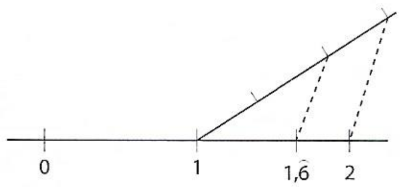

FIGURA 1.2.

Observa

Una fracción da lugar a un número decimal limitado si, en su expresión irreducible, el denominador es un producto de potencias de 2 y de 5.

Así, 1/4, 34/125, 7/20 dan lugar a números decimales limitados, puesto que:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^0} = 0{,}25$$

$$\frac{34}{125} = \frac{34}{5^3 \cdot 2^0} = 0{,}272$$

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \cdot 5} = 0{,}35$$

Observa

Un número decimal periódico con **período 9** es un decimal exacto:

$7{,}12\widehat{9} = 713/100 = 7{,}13$

1.2. Los números irracionales

Además de las expresiones decimales limitadas o ilimitadas periódicas, existen **expresiones decimales ilimitadas no periódicas;** por ejemplo:

- 1,010 010 001...
- −3,525 125 625...
- 3,141 592 653... = π
- 1,414 213 562... = $\sqrt{2}$
- 2,718 281 828... = e

Se denominan **números irracionales** las expresiones decimales que no son limitadas ni periódicas y que, por tanto, no pueden expresarse como fracciones. El conjunto de los números irracionales está designado por $\mathbb{I}$.

Los miembros de la escuela pitagórica (siglo VI a. C.) ya conocían la existencia de números que no podían ser expresados como una fracción. Ejemplos de estos números irracionales son la diagonal de un cuadrado cuyo lado es la unidad, $\sqrt{2}$, y la diagonal de un pentágono regular que tiene por lado también la unidad, el **número áureo:**

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Otro ejemplo de número irracional es el número π, que proporciona la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Representación gráfica de los números irracionales

Puesto que los números irracionales admiten una expresión decimal, aunque ilimitada, es lógico suponer que pueden representarse en una recta, al igual que los racionales: una vez situada la parte entera, se procede a dividir la unidad en diez partes para disponer las décimas; a continuación, cada décima se subdivide en diez partes para situar las centésimas, y se prosigue del mismo modo para las milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas... (figura 1.3).

Este proceso supone una forma de aproximación al número irracional mediante la construcción de lo que se denominan **segmentos encajados.** Por ejemplo, $\pi = 3{,}141592\ldots$ es un número ubicado entre 3 y 4. Si se divide en diez partes el segmento de la recta comprendido entre 3 y 4, resulta que π está entre 3,1 y 3,2. Prosiguiendo de este modo, π está determinado por una sucesión[1] de segmentos, que se podrían indicar como sigue:

$s_0 = (3, 4)$ $\qquad s_3 = (3{,}141,\ 3{,}142)$

$s_1 = (3{,}1,\ 3{,}2)$ $\qquad s_4 = (3{,}1415,\ 3{,}1416)$

$s_2 = (3{,}14,\ 3{,}15)$ $\qquad \ldots$

Cada segmento está contenido en el anterior y es la décima parte de él.

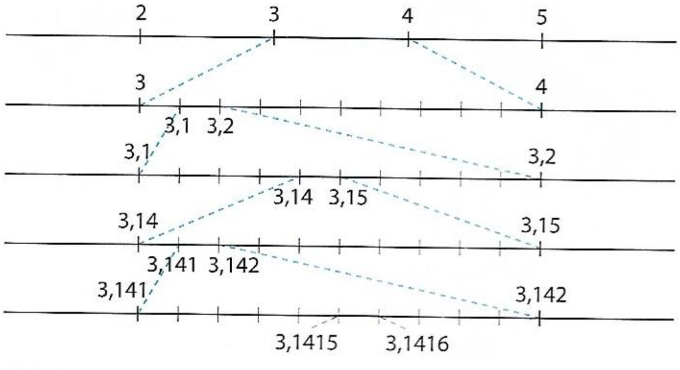

FIGURA 1.3.

[1]**sucesión:** secuencia de elementos escritos en un cierto orden.

Si aceptamos como axioma[1] que existe un punto común para cada sucesión decimal de segmentos encajados, podemos concluir que la expresión decimal que determina un número irracional se puede representar por un punto en la recta graduada.

Se ha introducido la noción de sucesión decimal de segmentos encajados como una forma de representar una expresión decimal ilimitada no periódica. No obstante, conviene remarcar que un número decimal cualquiera también se puede representar de la misma forma, aunque este no sea el procedimiento más habitual.

La representación exacta de un número irracional es, a menudo, imposible.

Los números irracionales que proceden de radicales cuadráticos pueden representarse como se indica en la figura 1.4.

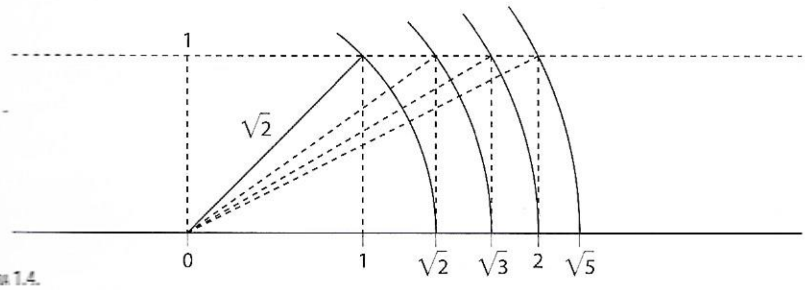

FIGURA 1.4.

La representación de los números irracionales rellena los huecos que deja en la recta la representación de los números racionales, por lo que la completan.

Del mismo modo, podemos afirmar que a cualquier punto, P, de la recta se le puede asignar un número racional o irracional; basta con realizar el proceso contrario: cualquier punto, P, de la recta será el punto común de una sucesión decimal de segmentos encajados. Si esta sucesión es limitada, determina una expresión decimal limitada, y si no lo es, una ilimitada.

A toda **expresión decimal** (racional o irracional) le corresponde un único punto en la **recta graduada**, y viceversa.

Observa

El número decimal limitado $-2{,}456$ se puede determinar a partir de la siguiente **sucesión decimal limitada:**

$-2{,}456 = [(-3, -2), (-2{,}5, -2{,}4), (-2{,}46, -2{,}45)]$

El número decimal periódico $0{,}\widehat{3}$ se puede determinar a partir de la sucesión decimal ilimitada:

$0{,}\widehat{3} = [(0, 1), (0{,}3, 0{,}4), (0{,}33, 0{,}34), (0{,}333, 0{,}334) \ldots]$

Actividades

1 ¿Por qué $-5{,}02\widehat{27}$ no es un número irracional?

2 Determina y razona cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales:

$$\frac{2}{7},\ 0{,}017,\ -3{,}41232323\ldots,\ \sqrt{3},$$

$$\sqrt{\frac{1}{81}},\ 4{,}1213141516\ldots$$

3 Razona cuál de las siguientes frases es cierta:

a) Todo número decimal se puede expresar como una fracción.

b) Los números reales se pueden expresar como un número decimal limitado o periódico.

c) Todo número racional es real.

d) Todo número entero es racional.

e) Hay números reales que no pueden expresarse como una fracción.

f) Entre dos números racionales hay infinitos irracionales.

g) Los números irracionales no se pueden expresar en forma decimal.

[1]**axioma:** proposición universalmente aceptada y no demostrada. Es un principio claro y evidente.

2 El conjunto de los números reales

Los números decimales limitados, ilimitados periódicos e ilimitados no periódicos constituyen el denominado conjunto de los números reales.

Los números racionales y los irracionales constituyen el conjunto de los **números reales,** que está designado por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

La determinación de un número real mediante segmentos encajados no es única ni, por supuesto, práctica. Un número real admite otro tipo de representaciones:

- Mediante **sucesiones de números decimales.** Por ejemplo:
  - 1/3 se puede aproximar mediante las sucesiones:
    - 0,3, 0,33, 0,333, ..., que se aproxima a $\frac{1}{3}$ por defecto.
    - 0,4, 0,34, 0,334, ..., que se aproxima a $\frac{1}{3}$ por exceso.
  - $\sqrt{2}$ se puede aproximar mediante las sucesiones:
    - 1, 1,4, 1,41, 1,414, ..., que se aproxima a $\sqrt{2}$ por defecto.
    - 2, 1,5, 1,42, 1,415, ..., que se aproxima a $\sqrt{2}$ por exceso.

  En ambas sucesiones, cada término ofrece una mejor aproximación al número real que el término anterior.

- Mediante una **expresión decimal.** Por ejemplo:
  - $\frac{3}{8} = 0{,}375$
  - $\frac{5}{13} = 0{,}384\,615\,384\,6\ldots$
  - $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5\ldots$

  Como no es posible manejar infinitas cifras decimales, se utilizan aproximaciones. Por ejemplo, el número π se expresa de forma aproximada en función de la necesidad de precisión: 3,14, si se aproxima con dos cifras decimales; 3,1416, si se hace con cuatro, etc. El número decimal 3,14 es una aproximación por defecto de π, y 3,1416 lo es por exceso.

Recuerda

Si un número a es una aproximación por defecto del número real x, entonces $a < x$. Si es una aproximación por exceso, $a > x$.

Es decir, toda aproximación supone un cierto error.

Recuerda

Para hacer cálculos con números racionales, es conveniente utilizar sus **expresiones fraccionarias.** Así se garantiza la exactitud en el proceso.

Actividades

4 Determina una sucesión que se aproxime por defecto al número irracional $\sqrt{5}$.

Solución: 2, 2,2, 2,23, 2,235, 2,236 0, 2,236 06, 2,236 067, 2,236 067 9, 2,236 067 97, 2,236 067 977, 2,236 067 977 4, ...

5 Escribe una sucesión que se aproxime a $-\frac{4}{7}$ por exceso.

Solución: −0,5, −0,57, −0,571, −0,571 4, −0,571 42, −0,571 428, −0,571 428 5, −0,571 428 57, −0,571 428 571, −0,571 428 571 4, −0,571 428 571 42, ...

6 Aproxima por defecto el número e mediante una expresión con cuatro cifras decimales.

7 Escribe dos números, uno racional y otro irracional, comprendidos entre los siguientes pares de números:

a) 5,1497 y 5,1498 ***b)*** −0,0091 y −0,009

3 La recta real. Intervalos

3.1. La recta real

Como ya hemos visto, si en la recta de la figura 1.5 se fija un punto de origen, 0, y se determina un segmento unidad, a cada número real le corresponde un único punto, y viceversa: a cada punto se le puede asignar un único número real.

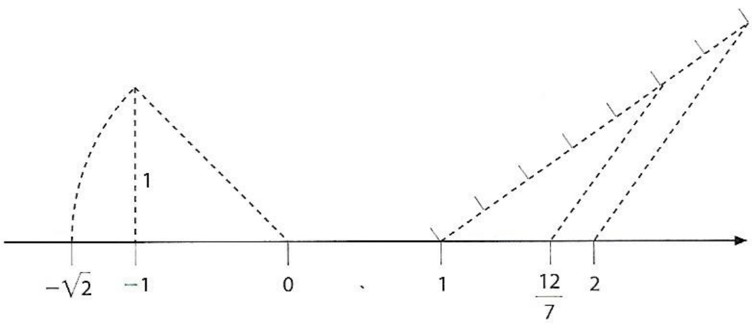

FIGURA 1.5.

La representación gráfica del conjunto de los números reales se denomina **recta real** o **recta numérica.**

3.2. Intervalos

Un **intervalo** es un subconjunto de números reales que se corresponde gráficamente con los puntos de un **segmento** o de una **semirrecta** de la **recta real** (figuras 1.6.a y 1.6.b).

En la recta numérica se asigna $-\infty$ al extremo izquierdo, y $+\infty$, al derecho; por eso, en ocasiones, se utiliza el intervalo $(-\infty, +\infty)$ para denotar el conjunto de todos los **números reales.**

Sean a y b dos números reales tales que $a < b$; se denomina **intervalo abierto** de extremos a y b al conjunto de números reales, x, tales que $a < x < b$. Se representa por (a, b):

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Gráficamente, el intervalo (a, b) es el conjunto de los puntos del segmento ab, excluyendo los extremos, a y b (figura 1.6.a).

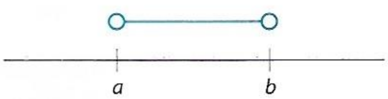

FIGURA 1.6.a.

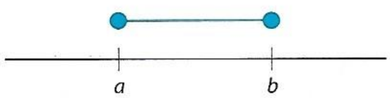

FIGURA 1.6.b.

El conjunto de números reales, x, tales que $a \leq x \leq b$ constituye un **intervalo cerrado;** se representa por $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Gráficamente, el intervalo $[a, b]$ es el conjunto de puntos del segmento ab incluyendo los extremos (figura 1.6.b).

El intervalo $(a, b]$ representa el conjunto de números reales, x, tales que $a < x \leq b$. El intervalo $[a, b)$ representa el conjunto de números reales, x, tales que $a \leq x < b$.

Ambos intervalos, $(a, b]$ y $[a, b)$, se llaman **semiabiertos** o **semicerrados,** ya que solo uno de sus extremos pertenece al intervalo:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \qquad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Observa

La expresión $b > a$ significa que b es mayor que a; por tanto, en la recta, b está a la derecha de a.

La expresión $a > 0$ equivale a decir que a es un número positivo y se representa a la derecha del origen, 0, en la recta real. Cuando a es un número negativo, se escribe $a < 0$ y se representa a la izquierda del origen.

Cuando aparecen los signos $\leq$ o $\geq$ entre dos expresiones numéricas o algebraicas, se entiende que estas pueden ser también iguales.

Observa

Si $a = b$, el intervalo abierto (a, b) no contiene ningún punto: es el **conjunto vacío.**

Si $a = b$, el intervalo cerrado $[a, b]$ solo contiene un punto, $P = a = b$.

Gráficamente, el intervalo $(a, b]$ es el conjunto de puntos del segmento ab excluyendo el extremo a e incluyendo el extremo b (figura 1.6.c).

De la misma manera, el intervalo $[a, b)$ es el conjunto de puntos del segmento ab donde se incluye el extremo a y se excluye el otro extremo, b (figura 1.6.d).

FIGURA 1.6.c.

FIGURA 1.6.d.

La **amplitud** de un intervalo es la longitud del segmento que determina.

El conjunto de los números reales, x, tales que $x < a$, se representa por $(-\infty, a)$ (figura 1.6.e). Del mismo modo, el conjunto de los números reales, x, tales que $x > a$, está representado por $(a, +\infty)$ (figura 1.6.f). Gráficamente, corresponden a dos **semirrectas** cuyo origen es a (al que no incluyen) y tienen sentido opuesto (figuras 1.6.e y 1.6.f).

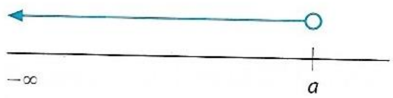

FIGURA 1.6.e.

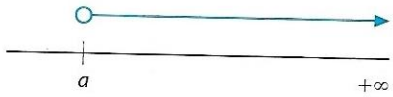

FIGURA 1.6.f.

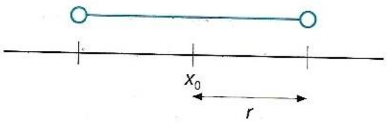

FIGURA 1.7.

El **entorno de un punto, x_0,** es el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, donde r es el radio, es decir, la mitad de la amplitud (figura 1.7). Dicho entorno se designa por $E(x_0, r)$.

Ejemplos

a) *Representar gráficamente los intervalos* $(3, 5)$, $(-1/2, 3/4]$, $(-\infty, 6)$, $[-2, +\infty)$ y $[-5/2, 7/3]$.

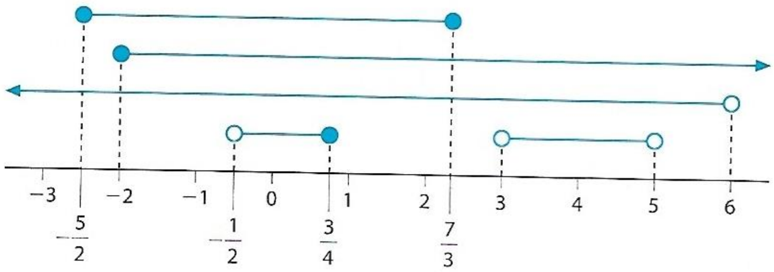

FIGURA 1.8.

b) *¿Con qué conjuntos de números reales se corresponden los intervalos del ejemplo anterior?*

Se corresponden con $3 < x < 5$, $-1/2 < x \leq 3/4$, $x < 6$, $x \geq -2$ y $-5/2 \leq x \leq 7/3$, respectivamente.

c) *Indicar el entorno del punto* -1, *de radio* 0,5.

Es el intervalo $(-1{,}5, -0{,}5)$.

Actividades

8 Representa en la recta real los intervalos $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-5, \frac{4}{3}\right]$.

9 Representa gráficamente los números reales que verifican $-5 < x \leq 3$, $x > \sqrt{2}$, $1/3 \leq x \leq 5/2$ y $x \leq 3$. Escribe, en cada caso, de qué intervalo se trata.

4 Orden y desigualdades. Valor absoluto

4.1. Orden y desigualdad de números reales

El conjunto de los números reales con la relación menor o igual que ($\leq$) verifica las siguientes propiedades:

- $a \leq b$ si, y solo si, $b - a$ es un número real positivo o cero: $b - a \geq 0$.
- $a < b$, si, y solo si, $b - a > 0$. En este caso, decimos que a es estrictamente menor que b.

  Las expresiones $a \leq b$ y $a < b$ reciben el nombre de **desigualdades.**

Propiedades

1. Si se suma un mismo número real a los dos miembros de una desigualdad, esta se mantiene: si $a < b$ (o $a \leq b$), entonces $a + c < b + c$ (o $a + c \leq b + c$), donde c es un número real cualquiera.

   Así, como $-4 < 5$, también $-4 + 3 < 5 + 3$, es decir, $-1 < 8$. Del mismo modo, $-4 - 3 < 5 - 3$, es decir, $-7 < 2$.

2. Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número **positivo,** se mantiene la desigualdad, es decir: si $a < b$ (o $a \leq b$), y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$ (o $a \cdot c \leq b \cdot c$).

   Así, como $-5 < 3/5$, también $-5 \cdot 5/7 < 3/5 \cdot 5/7$, es decir, $-25/7 < 3/7$.

3. Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real **negativo,** se invierte la desigualdad, es decir: si $a < b$ (o $a \leq b$), y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$ (o $a \cdot c \geq b \cdot c$).

   Si en la desigualdad $-7 < -2$ se multiplican ambos miembros por -2, se obtiene $14 > 4$. De este modo, si a es un número positivo, $a/3 < 3a/7$, y si es negativo, $a/3 > 3a/7$.

Observa

La propiedad **2** sirve para la división por un número real positivo, puesto que dividir es lo mismo que multiplicar por el inverso.

La propiedad **3** se puede demostrar de la siguiente forma:

Sea $a < b$. En este caso, $b - a > 0$. Multiplicando $(b - a)$ por un número real negativo c, tenemos que $(b - a) \cdot c < 0$, es decir, $b \cdot c - a \cdot c < 0$. Esta desigualdad significa que $b \cdot c$ es menor que $a \cdot c$; por tanto, $a \cdot c > b \cdot c$, como se quería demostrar.

Ejemplo

a) *Si a cumple* $-1 < a + 3$ y $a + 3 < 0$, *¿a qué intervalo pertenece?*

A partir de las condiciones del enunciado, podemos determinar que:

$$-1 < a + 3 < 0$$

Por tanto, $a + 3$ pertenece al intervalo $(-1, 0)$. Para determinar a qué intervalo pertenece a, se procede del siguiente modo:

$$-1 - 3 < a + 3 - 3 < 0 - 3, \text{ es decir, } -4 < a < -3$$

Por consiguiente, a pertenece al intervalo $(-4, -3)$.

Actividades

10 Si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $1/a$ y $1/b$?

11 Si $a < 0$ y $b > 0$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $1/a$ y $1/b$?

12 Sabiendo que $2a - 1 > 0$ y $-3a > 4$, determina el intervalo al que pertenece a.

13 Si x, y, z son positivos, y $x \cdot (y + z) > y \cdot (x + z)$, ¿qué relación de orden existe entre x e y?

14 La diferencia de edad entre una madre y su hija es de 28 años. ¿Cuándo superará la edad de la hija la mitad de la de su madre más 10 años?

Solución: Cuando la hija tenga más de 49 años, la madre tendrá más de 76.

Propiedades

1. Para cualquier número real a:

$$|a| \geq 0$$

2. El valor absoluto del producto de números reales es igual al producto de los valores absolutos de los factores:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

3. Dados dos números reales a y b, se cumple que:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Esta expresión se llama **desigualdad triangular** o **desigualdad de Schwartz**.

Observa

La **distancia** entre los puntos a y b es:

$$d(a, b) = |b - a|$$

Mañana

4.2. Valor absoluto de los números reales

Sea x un número real. Se define su **valor absoluto,** $|x|$, como:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Algunos ejemplos de valores absolutos son los siguientes:

$|5| = 5$, $|-1/3| = 1/3$, $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $|2-\sqrt{7}| = \sqrt{7} - 2$

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$, es decir, x pertenece a $(-a, a)$.

Si $|x| \geq a$ y $a > 0$, entonces $x \geq a$ o $x \leq -a$. Dado que esta condición es contraria a la del ejemplo anterior, el conjunto que forma la unión de los dos intervalos se puede escribir como:

$$(-\infty, -a] \cup [a, +\infty) = \mathbb{R} - (-a, a)$$

Si a y b son dos números reales y $a \neq b$, entonces $|a - b| = |b - a|$. Por ejemplo, si tomamos $a = 7$ y $b = 2$, entonces:

$$|7 - 2| = |5| = 5 \text{ y } |2 - 7| = |-5| = 5$$

Ejemplo

b) *Determinar el conjunto de números reales que cumplen:*

- $|x| = 5$. Hay dos números reales que lo cumplen: -5 y 5.
- $|x| \geq 2 \Rightarrow x \leq -2$ o $x \geq 2$

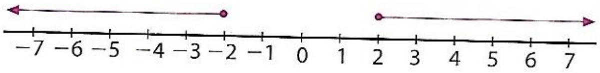

FIGURA 1.9.a.

- $|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$

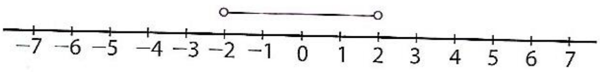

FIGURA 1.9.b.

- $|2 - x| < 5 \Rightarrow |x - 2| < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow -5 + 2 < x < 5 + 2 \Rightarrow -3 < x < 7$

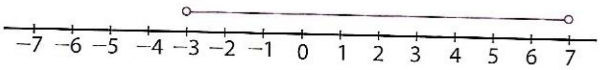

FIGURA 1.9.c.

Actividades

15 Escribe dos números racionales y dos irracionales que sean, en valor absoluto, menores que 0,1.

16 Si sabemos que $|x - 1| < 5$, ¿a qué intervalo pertenece x?

17 Si $|x| \leq \sqrt{2}$, determina la amplitud del intervalo en el que está x.

18 Determina el conjunto de números reales que cumplen que $|x| > 4$.

19 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left| |(2/3) - 1| - |(1/2) - (7/6)| \right|$

b) $|2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} + 1|$

Solución: ***a)*** 1/3 ***b)*** −3

5 Operaciones con números reales

Las operaciones de adición y multiplicación se definen en el conjunto de los números reales con las mismas propiedades que en el de los racionales.

Propiedades de la suma de números reales:

- **Conmutativa:** $a + b = b + a$.
- **Asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Existe un **elemento neutro,** que es el cero: $a + 0 = 0 + a = a$.
- Cualquier número real, a, tiene un **opuesto,** $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

Propiedades de la multiplicación de números reales:

- **Conmutativa:** $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- Existe un **elemento neutro,** que es el uno: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- Todo número real no nulo, a, tiene un **inverso,** $1/a$, tal que $a \cdot (1/a) = 1$.
- **Distributiva** respecto de la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Cuando se opera con números reales, a menudo se trabaja con **aproximaciones** y, por tanto, es conveniente precisar qué cifras del resultado se pueden considerar correctas o exactas, a partir de las cifras aproximadas de los operandos.

Recuerda

La resta de dos números reales, $a - b$, es la suma del primero y el opuesto del segundo:

$$a - b = a + (-b)$$

La división de dos números reales, a/b, donde $b \neq 0$, es la multiplicación del primero y el inverso del segundo:

$$a/b = a \cdot (1/b)$$

Ejemplos

a) *Para sumar los números reales $\sqrt{3}$ y π, ambos irracionales, se pueden sumar sus aproximaciones por defecto:*

- $\sqrt{3} = 1{,}7320$ y $\pi = 3{,}1415$
- $\sqrt{3} + \pi = 4{,}8735$

¿Cuántas cifras se pueden considerar correctas?

Los dos números, $\sqrt{3}$ y π, están contenidos, respectivamente, entre los siguientes:

$$1{,}7320 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}7321 \qquad 3{,}1415 \leq \pi \leq 3{,}1416$$

Por tanto: $4{,}8735 \leq \sqrt{3} + \pi \leq 4{,}8737$

Únicamente se pueden considerar cuatro cifras correctas: $\sqrt{3} + \pi = 4{,}873$.

En general, cuando se suman o se restan aproximaciones, se admite que solo se puede garantizar la exactitud del resultado hasta un orden menos que el del sumando menos preciso.

Si se suman las aproximaciones $\sqrt{3} = 1{,}732$ y $\pi = 3{,}1415$, el resultado con todas sus cifras exactas es $\sqrt{3} + \pi = 4{,}87$.

b) *Al multiplicar los números reales $x = 2{,}7854\ldots$ y $z = 1{,}74\ldots$, obtenemos:*

$$x \cdot z = 4{,}846596\ldots$$

¿Cuántas cifras pueden considerarse exactas?

Como $2{,}7854 \leq x \leq 2{,}7855$ y $1{,}74 \leq z \leq 1{,}75$, entonces:

$$4{,}846596 \leq x \cdot z \leq 4{,}874625$$

Por tanto, solo hay dos cifras exactas: $x \cdot z = 4{,}8$.

En general, en la multiplicación de aproximaciones ocurre lo mismo que en la suma: en este último ejemplo, como el factor menos preciso tiene tres cifras exactas, solo se puede garantizar que el número de cifras exactas del producto es dos.

6 Potenciación de números reales

Sea a un número real, $a \in \mathbb{R}$, y n, un número entero, $n \in \mathbb{Z}$. Se define a^n como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0$$
$$a^0 = 1$$

Cuando el exponente es negativo, $-n$, donde $n > 0$, tenemos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ donde } a \neq 0$$

Por ejemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{-5}{2}\right)^5 = \frac{-3\,125}{32}$.

Observa

A partir de las propiedades de la potenciación, se deducen las siguientes igualdades:

- $a^0 = 1$, ya que:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ya que:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Propiedades

- Producto de potencias de igual exponente: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.
- Cociente de potencias de igual exponente: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.
- Producto de potencias de igual base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Recuerda

Algunas **identidades notables** relacionadas con las potencias son:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Actividades

20 Realiza las siguientes operaciones:

a) $3^2 + 3^{-2}$ ***b)*** $2^{-3} \cdot 2^5$ ***c)*** $2^3/2^{-6}$ ***d)*** $3 \cdot (6/5)^{-2}$ ***e)*** $2^{-1} \cdot (2/3)^2 \cdot (1/6)^{-2} - 2^{-3}$ ***f)*** $5^{-2} \cdot (1/5)^{-4}$

Solución: ***a)*** 82/9 ***b)*** 4 ***c)*** 512 ***d)*** 25/12 ***e)*** 63/8 ***f)*** 25

21 Expresa los siguientes números como potencias de exponente negativo:

a) $1/4^7$ ***b)*** $(3/5)^6$ ***c)*** $1/125$ ***d)*** $729/64$

Solución: ***a)*** 2^{-14} ***b)*** $(5/3)^{-6}$ ***c)*** 5^{-3} ***d)*** $(2/3)^{-6}$

22 Escribe en forma de potencias de base 10 las siguientes expresiones:

a) 1/10 000 ***b)*** 0,000001 ***c)*** 1/0,001 ***d)*** 10 000 000

23 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{6^4 \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-3}}{14^{-3} \cdot 3^2 \cdot 10^7}$ ***b)*** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}$ ***c)*** $\dfrac{21^5 \cdot 5^{-7} \cdot 15^2 \cdot 3^4}{2^{-8} \cdot 36^2}$

Solución: ***a)*** 5^{-7} ***b)*** $2 \cdot 3^4$ ***c)*** $2^4 \cdot 3^7 \cdot (7/5)^5$

24 Di si son ciertas estas igualdades. Cuando no lo sean, escribe la igualdad correcta.

a) $\dfrac{2^{-4}}{3^{-7}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ ***b)*** $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-3} = 2^{18}$ ***c)*** $\left(\dfrac{3^{-3} \cdot 3^2}{6^{-1}}\right) = 2$

25 Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 1$

b) $\left(\dfrac{2}{3} - 1\right)^2$

c) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-1}$

d) $\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right]^{-2} \cdot \left[1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^2$

Solución: ***a)*** $-5/9$ ***b)*** 1/9 ***c)*** 4/5 ***d)*** 16/81

7 Radicación de números reales

7.1. Raíz de un número real y propiedades

A partir de la definición de potencia n-ésima de x, donde n es un número natural, si $x^n = a$, x es la raíz n-ésima de a y se escribe $x = \sqrt[n]{a}$. Es decir:

$$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a$$

La expresión anterior, $\sqrt[n]{a}$, se llama **radical** de **índice n,** y **radicando a.**

Así, por ejemplo:

$\sqrt{9} = 3$ ya que $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$

Los radicales pueden ser números racionales o irracionales. Por ejemplo:

- $\sqrt{4}, \sqrt{49}, \sqrt{0{,}25}, \sqrt[3]{125}$ y $\sqrt[5]{32}$ son números racionales, ya que su expresión decimal es exacta:

  $\sqrt{4} = 2, \sqrt{49} = 7, \sqrt{0{,}25} = 0{,}5, \sqrt[3]{125} = 5, \sqrt[5]{32} = 2$

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{-11}, \sqrt[4]{5}$ y $\sqrt[5]{30}$ son números irracionales, puesto que su expresión decimal es ilimitada y no periódica:

  $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \sqrt{3} = 1{,}7320\ldots, \sqrt[3]{-11} = -2{,}2239\ldots, \sqrt[4]{5} = 1{,}49953\ldots, \sqrt[5]{30} = 1{,}9743\ldots$

Propiedades

1. Si $\sqrt[n]{a} = x$, $x^n = a$, por lo que $x = \sqrt[n]{x^n}$.

2. Si $\sqrt[n]{a} = -x$, $(-x)^n = a$, por lo que $x = -\sqrt[n]{(-x)^n}$.

En las dos propiedades anteriores, si n es par, x solo existe para $a > 0$.

Fíjate en estos dos ejemplos:

- $3 = \sqrt{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[5]{3^5} \ldots$

  Es decir: $3 = \sqrt{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[5]{243} \ldots$

- $-3 = -\sqrt{3^2} = -\sqrt[3]{3^3} = -\sqrt[4]{3^4} = -\sqrt[5]{3^5} \ldots$

  Es decir: $-3 = -\sqrt{9} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[4]{81} = \sqrt[5]{-243} \ldots$

Radicales equivalentes

Los radicales que expresan un mismo número real son **equivalentes.**

Así, son radicales equivalentes:

- $\sqrt{7} = \sqrt[4]{49} = \sqrt[6]{343} = \sqrt[8]{2\,401} = \sqrt[10]{16\,807}$

  puesto que: $\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[8]{7^4} = \sqrt[10]{7^5}$

- $\sqrt[3]{-7} = -\sqrt[6]{49} = \sqrt[9]{-343} = -\sqrt[12]{2\,401} = \sqrt[15]{-16\,807}$

  ya que: $\sqrt[3]{-7} = -\sqrt[6]{(-7)^2} = \sqrt[9]{(-7)^3} = -\sqrt[12]{(-7)^4} = \sqrt[15]{(-7)^5}$

Simplificar un radical es calcular su radical equivalente de índice menor.

Recuerda

Una potencia de exponente negativo equivale a su inversa con exponente positivo:

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

Observa

- Existen dos números reales que, elevados al cuadrado, dan 4, que son $+2$ y -2:

  $$x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{4} = 2 \\ x = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$$

  Esto no significa que $\sqrt{4}$ tenga dos valores: $+\sqrt{4} = 2$ es un número positivo, y $-\sqrt{4} = -2$ es un número negativo.

- Solo existe un número real que elevado al cubo dé 8, que es $+2$:

  $$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

- Solo existe un número real que elevado al cubo dé -8, que es -2:

  $$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Observa

Cuando el radicando es positivo, se pueden multiplicar el índice y el exponente de un radical por un mismo número, con el fin de obtener un radical equivalente.

Cuando haya que calcular un radical de índice par, equivalente a un radical de índice impar y radicando negativo, se procede como en el siguiente ejemplo:

$$\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5} = -\sqrt[6]{5^2} = -\sqrt[6]{25}$$

7.2. Expresión de un radical como una potencia de exponente fraccionario

Dado que $\sqrt[n]{x^n} = x = x^1 = x^{n/n}$, resulta $\sqrt[n]{x^n} = x^{n/n}$.

Por tanto, si $x = \sqrt[n]{a}$, entonces $x = a^{1/n}$, es decir, un radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Observa

En el cálculo con potencias de exponente fraccionario son válidas las mismas propiedades estudiadas para las potencias con exponente entero.

7.3. Reglas de cálculo con radicales

- **Producto y cociente de radicales**
  - Si son del mismo índice:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^p}$$

Así, por ejemplo:

$$\sqrt{2^5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{96}$$

  - Si tienen índices distintos, se transforman previamente los factores en radicales equivalentes de índice común. Así, por ejemplo:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{(-3)}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[6]{2^3} \cdot \left(-\sqrt[6]{3^2}\right)}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{-\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}}{\sqrt[6]{2^5}} = -\sqrt[6]{\frac{3^2}{2^2}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

- **Potencia de un radical**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Así, por ejemplo:

$$\left(\sqrt[3]{-3}\right)^2 = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

- **Raíz de un radical**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Así, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{4^6}\right)} = \sqrt[15]{4^6} = \sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^4}$$

- **Extracción de factores de un radical**

Para extraer factores del radical $\sqrt[n]{a^p}$, p debe ser mayor o igual que n. Así:

$$\sqrt[3]{288} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^{3+2}} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^2} =$$
$$= 2\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{36}$$

- **Suma de radicales**

Solo se puede efectuar si los radicales son semejantes:

$\sqrt{8}$ y $\sqrt{2}$ son radicales semejantes, puesto que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$\sqrt{32}$ y $\sqrt[4]{324}$ también son radicales semejantes, ya que:

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ y } \sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^2} = 3 \cdot \sqrt[4]{2^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

Así, por ejemplo:

$$-\sqrt{245} + 4\sqrt{7} - \sqrt{125} = -7\sqrt{5} + 4\sqrt{7} - 5\sqrt{5} = 4\sqrt{7} - 12\sqrt{5}$$

Racionalización

Racionalizar una expresión en cuyo denominador aparecen radicales es transformarla en otra equivalente con un número racional por denominador.

- Si en el denominador aparece un radical $\sqrt[n]{a^m}$, se multiplican numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, ya que:

$$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}=\sqrt[n]{a^{m+n-m}}=\sqrt[n]{a^n}=a$$

- Si en el denominador aparece una suma o una resta de radicales cuadráticos (de índice 2), se multiplican numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador, puesto que:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$$

Recuerda

El conjugado de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, y viceversa.

Ejemplos

a) *Racionalizar las expresiones* $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3^2}}$, $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$ y $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

- $$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- $$\frac{2}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

- $$\frac{2}{1-\sqrt{3}}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$
  $$=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{-2}=-1-\sqrt{3}$$

- $$\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\left(-1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$$
  $$=\frac{\left(-1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}{-1}=$$
  $$=-2+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

Actividades

26 Escribe tres radicales equivalentes a estos otros:

$$\sqrt[5]{2^2},\ \sqrt{14},\ \sqrt[3]{(-3)}\ \text{y}\ \sqrt[4]{2^3}$$

27 ¿Por qué son falsas las siguientes igualdades?

a) $\sqrt{-2}=\sqrt[8]{(-2)^4}=\sqrt[8]{16}$

b) $\sqrt[3]{-2}=\sqrt[12]{(-2)^4}=\sqrt[12]{16}$

28 Escribe un radical equivalente a cada uno de los siguientes radicales con el índice común:

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{3^2},\ \sqrt[4]{3^3}$$

29 Simplifica los radicales $\sqrt[4]{5^2}$, $\sqrt[14]{7^7}$, $\sqrt[8]{3^6}$ y $\sqrt[12]{2^{16}}$.

Solución: $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{3^3}$, $\sqrt[3]{2^4}$

Actividades

30 Escribe estas expresiones en forma de potencias de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[3]{a^7}$ *d)* $\sqrt[12]{5^9}$ *g)* $\dfrac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[3]{2^{-2}}}$

b) $\sqrt{2^5}$ *e)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$ *h)* $\sqrt{3^{-1}}\cdot\sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[4]{3^{-3}}$ *f)* $a^3\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}$ *i)* $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}$

Solución: *a)* $a^{7/3}$ *b)* $2^{5/2}$ *c)* $3^{-3/4}$ *d)* $5^{3/4}$ *e)* $2^{-4/3}$ *f)* $a^{7/3}$ *g)* $2^{19/15}$ *h)* $3^{1/6}$ *i)* $5^{15/16}$

31 Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado como un único radical lo más simplificado posible:

a) $\sqrt[3]{125^5}\cdot\sqrt[7]{-\dfrac{1}{5^6}}$ *c)* $\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{40}$ *e)* $\dfrac{\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[6]{6}}{\sqrt{3}}$

b) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ *d)* $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^{-3}}\cdot\sqrt[3]{(-a)}$ *f)* $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}}$

Solución: *a)* $-5^4\sqrt[7]{5}$ *b)* $3\sqrt[6]{72}$ *c)* $90\sqrt{2}$ *d)* $-\sqrt[4]{\dfrac{a^7}{b^3}}$ *e)* $\sqrt[12]{3^5\cdot 2^2}$ *f)* a

32 Simplifica las siguientes operaciones extrayendo factores fuera del radical:

a) $\dfrac{\sqrt{6\,048x^7y^3}}{\sqrt[3]{7\,938xy^4}}$ *b)* $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4\cdot\left(a^2\cdot\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

Solución: *a)* $2^2\cdot x^3\cdot\sqrt[6]{\dfrac{6xy}{7}}$ *b)* $a^9\cdot\sqrt[3]{a}$

33 Efectúa las siguientes operaciones simplificando al máximo:

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}$ *b)* $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\dfrac{2}{25}}$

Solución: *a)* $-40\sqrt{2}$ *b)* $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}-\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

34 Simplifica las expresiones:

a) $\sqrt{512}+\sqrt{648}-\sqrt{\dfrac{128}{81}}$ *b)* $\sqrt[6]{6\,561a^2}+\sqrt[3]{3\,993a}-\sqrt[3]{3a^4}$

Solución: *a)* $\dfrac{298\sqrt{2}}{9}$ *b)* $(14-a)\cdot\sqrt[3]{3a}$

35 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$ *b)* $2\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

Solución: *a)* $17+4\sqrt{15}$ *b)* $44\sqrt{6}-16\sqrt{15}$

36 Efectúa estos cálculos:

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot\sqrt{3}$ *c)* $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2-1\right]\cdot\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+3\right)$ *d)* $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$

Solución: *a)* $3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ *b)* $2\sqrt{6}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}-3$ *c)* $2\sqrt{2}-4$ *d)* 1

37 Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ *b)* $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}$ *c)* $\dfrac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$ *d)* $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$

Solución: *a)* $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\dfrac{-11+3\sqrt{5}}{19}$ *c)* $\dfrac{7\sqrt[6]{432}}{6}$ *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$

[... Raíces no cuadráticas con calculadora

Para calcular raíces con la calculadora científica; en primer lugar se debe introducir el índice de la raíz, a continuación, según la calculadora, hay que presionar una de las teclas siguientes:

INV SHIFT 2ndF

Y seguidamente, una de las teclas

$x^{1/y}$, $\sqrt[x]{\ }$, $\sqrt[x]{y}$

Para finalizar se introduce el radicando y se pulsa sobre las teclas

= EXE RUN

Por ejemplo, para calcular $\sqrt[3]{-48}$, se puede proceder así:

3 SHIFT $\sqrt[x]{\ }$ − 48 =

La pantalla mostrará:

-3.634241186

Averigua cómo se procede con tu calculadora.

8 Aproximaciones decimales y errores

8.1. Aproximaciones

Dejando aparte los enteros y algunos decimales limitados, cuando se han de efectuar cálculos se toman **aproximaciones.** Las aproximaciones a un número real se pueden realizar mediante dos métodos: truncamiento y redondeo. Veamos, a continuación, la diferencia que hay entre ellos:

- **Truncar** un número consiste en cortar su expresión decimal en un lugar determinado. Este tipo de aproximación es siempre **por defecto.**
- **Redondear** un número consiste en prescindir de sus cifras decimales, a partir de una dada, de manera que:
  - Si la primera cifra que se desprecia **es menor que 5,** las que se mantienen se conservan como estaban. Esta es una **aproximación por defecto.**
  - Si la primera cifra que se desprecia **es mayor o igual que 5,** la última cifra decimal que se conserva queda aumentada en una unidad. Esta es una **aproximación por exceso.**

8.2. Error absoluto

El **error absoluto** que se comete en una aproximación es el valor absoluto de la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto.

Ejemplos

a) *Si se toma el valor* 0,666 *para aproximar* 2/3, *¿qué error absoluto se comete?*

$$\left|0{,}666-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{666}{1\,000}-\frac{2}{3}\right|=\left|-\frac{2}{3\,000}\right|=\frac{2}{3\,000}$$

b) *Si tomamos el valor* 0,667 *para aproximar* 2/3, *¿qué error absoluto se comete?*

$$\left|0{,}667-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{667}{1\,000}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1}{3\,000}\right|=\frac{1}{3\,000}$$

Considerando el valor absoluto del error cometido en cada caso, es mejor la segunda aproximación.

Cuando se redondea un número, el **máximo error absoluto** que se comete es media unidad del orden de la última cifra que se conserva. Todas las cifras de un redondeo se denominan, por convenio, **cifras exactas.**

Cuando se trabaja con una aproximación y no se conoce su error absoluto, se toma el máximo error absoluto correspondiente al redondeo, es decir, la mitad de la unidad decimal de la última cifra escrita.

Si el número que queremos aproximar es entero, se toma como máximo error absoluto la mitad de la unidad que ocupa la posición de la última cifra escrita no nula. Así, el máximo error cometido al aproximar un resultado como 2 500 es 50; es decir, el resultado estará entre 2 450 y 2 550.

Actividades

Establece, en cada caso, una aproximación con 4 cifras exactas:

a) $\sqrt{23}$ **b)** $\sqrt[6]{3}$ **c)** $-4,\widehat{57}$

Redondeo con la calculadora

Las calculadoras científicas redondean siempre los resultados a la última cifra. Para redondear, basta con pulsar la opción FIX y, a continuación, el número de cifras decimales que se desea.

Generalmente, para activar esta opción, hay que pulsar:

MODE (3 veces)

Aparece en pantalla

FIX SCI NORM
1 2 3

Pulsa la tecla 1 y en pantalla aparece

FIX 0-9

Presionamos el número de decimales deseados.

Así, para redondear π con 4 cifras decimales, según el modelo de calculadora, se pulsan estas teclas:

π MODE MODE MODE

1 4 =

En la pantalla aparecerá:

3.1416

Averigua cómo puedes redondear con tu calculadora.

Observa

Redondear un número a una determinada unidad decimal es buscar la aproximación decimal cuyo error sea menor.

- Si el número $\sqrt{2}$ se redondea a centésimas, 1,41, el error que se comete es:

$$\left|1{,}41-\sqrt{2}\right|=0{,}004\ldots<0{,}005$$

es decir, menor que 5 milésimas.

- Si no se indica cuál es su error absoluto, 9,42 estaría entre:

9,42 − 0,005 y 9,42 + 0,005

Se llama **incertidumbre** o **cota de error,** Δx, de una aproximación, x, al valor máximo que puede alcanzar el error absoluto. Se indica de la siguiente forma: $x \pm \Delta x$.

La incertidumbre o cota de error de un número redondeado se toma como la mitad de la unidad decimal de la última cifra escrita.

Cifras significativas

En una aproximación, las **cifras significativas** son aquellas que tienen sentido físico. Hablamos de cifras significativas propiamente dichas al referirnos a las aproximaciones que se obtienen de procesos de medida, y en las que basta con que la incertidumbre sea menor que una unidad del orden de la última cifra que se conserva.

Ejemplos

c) *¿Cuál es la incertidumbre del número aproximado 3,8?*

Es 0,05 y se escribe $3{,}8 \pm 0{,}05$.

d) *¿Cuál es la incertidumbre del número aproximado 3,80?*

Es 0,005 y se escribe $3{,}80 \pm 0{,}005$.

e) *¿Cuál es la incertidumbre del número aproximado 45 780?*

Es 5 y se escribe $45\,780 \pm 5$.

f) *El valor exacto de un número está comprendido entre 3,615 y 3,625. ¿Cuáles son el número aproximado que lo representa y su incertidumbre?*

El número aproximado que representa dicho valor y su incertidumbre es $3{,}62 \pm 0{,}005$.

8.3. Error relativo

La incertidumbre, o cota de error, de un número aproximado proporciona información sobre el intervalo de valores en el que se encuentra dicho número, pero no sobre la calidad de la estimación.

El **error relativo** de una aproximación mide el error que se comete por unidad aproximada. Se expresa en forma de porcentaje:

$$e_r = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100$$

Un atleta invierte $40\ \text{s} \pm 1\ \text{s}$ en recorrer 400 m, mientras que otro tarda $125\ \text{min} \pm 1\ \text{min}$ en cubrir 40 km. El error relativo de la primera medición es $(1/40) \cdot 100 = 2{,}5$, es decir, 2,5 %, y el de la segunda, $(1/125) \cdot 100 = 0{,}8$, esto es, 0,8 %.

Como se puede observar, el error absoluto cometido al cronometrar el tiempo es mayor en la carrera de 40 km que en la de 400 m. Sin embargo, el error relativo es menor en la primera medición.

Actividades

39 Haciendo uso de la calculadora, redondea el resultado de los siguientes cálculos con un error menor que una milésima:

a) $\sqrt{10} \cdot \pi$ ***b)*** $\sqrt{7} - \sqrt[3]{2}$ ***c)*** $\sqrt[5]{7} \cdot 7{,}02$

40 Determina entre qué valores están comprendidos cada uno de los siguientes números aproximados. Escribe la aproximación y su incertidumbre en cada uno de los casos.

a) −7,06 ***b)*** 0,003 ***c)*** −50 000

41 Utilizando la calculadora, averigua qué error relativo se comete en las siguientes aproximaciones de π:

a) 3,14 ***b)*** 267/85 ***c)*** 3 927/1 250

Solución: ***a)*** 0,05 % ***b)*** 0,01 % ***c)*** 0,000 2 %

9 Notación científica

Expresar un número no nulo, x, en **notación científica** consiste en escribirlo como el producto de un número, a, comprendido entre 1 y 10, por una potencia entera de 10:

$$x = a \cdot 10^n, \text{ con } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo

a) *Escribir* 45 070 000 000 y 0,003 91 *en notación científica.*

- $45\,070\,000\,000 = 4{,}507 \cdot 10^{10}$
- $0{,}003\,91 = \dfrac{391}{100\,000} = \dfrac{3{,}91}{1\,000} = 3{,}91 \cdot 10^{-3}$

La escritura en notación científica de algunas constantes importantes, como las que hay en el margen, proporcionan el número de cifras exactas y su grado de incertidumbre. Por ejemplo, en el caso de la carga del electrón, la última cifra exacta es del orden de 10^{-22}, y esto significa que el error que se comete cuando se toma este valor es del orden de $0{,}5 \cdot 10^{-22}$ o $5 \cdot 10^{-23}$.

Para operar con números en notación científica, es necesario tener en cuenta que están formados por dos factores y que uno es una potencia.

Ejemplo

b) *Calcular en notación científica:*

- $5{,}32 \cdot 10^4 - 9{,}74 \cdot 10^7 + 3{,}14 \cdot 10^6 = 5{,}32 \cdot 10^4 - 9740 \cdot 10^4 + 314 \cdot 10^4 =$
  $= (5{,}32 - 9\,740 + 314) \cdot 10^4 = -9\,420{,}68 \cdot 10^4 = -9{,}42068 \cdot 10^7$
- $9{,}601 \cdot 10^{-3} - 7{,}9 \cdot 10^{-5} = 960{,}1 \cdot 10^{-5} - 7{,}9 \cdot 10^{-5} =$
  $= (960{,}1 - 7{,}9) \cdot 10^{-5} = 952{,}2 \cdot 10^{-5} = 9{,}522 \cdot 10^{-3}$
- $4{,}032 \cdot 10^4 \cdot 2{,}03 \cdot 10^{-12} : 6{,}5 \cdot 10^{-16} =$
  $= (4{,}032 \cdot 2{,}03 : 6{,}5) \cdot 10^{4-12+16} \cong 1{,}259\,224\,615 \cdot 10^8$

Actividades

Realiza las siguientes operaciones expresadas en notación científica:

a) $2 \cdot 10^7 \cdot 3{,}5 \cdot 10^4 \cdot 1{,}25 \cdot 10^5$ ***b)*** $1{,}03 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-8} - 10^{-5}$ ***c)*** $(4{,}7 \cdot 10^{-4})^2$

Solución: ***a)*** $8{,}75 \cdot 10^{16}$ ***b)*** $-8{,}92 \cdot 10^{-6}$ ***c)*** $2{,}209 \cdot 10^{-7}$

Expresa $3{,}7 \cdot 10^9$ años luz en km (velocidad de la luz: $c = 2{,}9979 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Solución: $3{,}498 \cdot 10^{22}$ km aprox.

Sabiendo que 18 g de agua contienen $6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas, expresa en notación científica la masa de una molécula de agua.

Solución: $2{,}99 \cdot 10^{-23}$g aprox.

Expresa en notación científica y con tres cifras exactas:

a) 299 792,4562 km/s ***c)*** 33 075 894,32 m

b) 0,003450 g ***d)*** $0{,}003468 \cdot 10^{-3}$ cm

Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $4{,}872 \cdot 10^4 + 1{,}74 \cdot 10^5 - 9{,}54 \cdot 10^6$ ***b)*** $3{,}76 \cdot 10^{-12} - 8{,}53 \cdot 10^{-13} + 4{,}98 \cdot 10^{-14}$

Solución: ***a)*** $-9{,}317\,28 \cdot 10^6$ ***b)*** $2{,}956\,8 \cdot 10^{-12}$

Observa

Hay ciertos números conocidos que se suelen expresar en notación científica:

- Carga del electrón: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
- Constante de gravitación: $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
- Presión atmosférica normal (1 atmósfera): $1{,}1013 \cdot 10^5$ Pa
- Número de Avogadro: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ moléculas $\cdot$ mol^{-1}
- Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m
- Velocidad de la luz en vacío: $c = 2{,}9979 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Masa del electrón: $m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg

Múltiplos y submúltiplos de unidades

tera	10^{12}	deca	10^1
giga	10^9	deci	10^{-1}
mega	10^6	centi	10^{-2}
miria	10^4	mili	10^{-3}
kilo	10^3	micro	10^{-6}
hecto	10^2	nano	10^{-9}

Notación científica con la calculadora

Para escribir un número en notación científica con la calculadora, se usa la tecla:

EXP

Por ejemplo, si se desea escribir el número $4{,}3 \cdot 10^{-6}$, hay que pulsar:

4,3 EXP (—) 6 =

En la pantalla aparecerá:

4.3-06

o bien:

0.0000043

10 Logaritmos

Para una determinada base, a, positiva y diferente de 1, el exponente y, tal que $x = a^y$ se denomina **logaritmo en base a de x,** y se escribe $\mathbf{y = \log_a x}$.

Por ejemplo:

- $\log_2 8 = 3$, porque $2^3 = 8$.
- $\log_2 (1/8) = -3$, porque $2^{-3} = 1/8$.
- $\log_{10} 1\,000 = 3$, porque $10^3 = 1\,000$.
- $\log_{10} 0{,}000\,001 = -6$, porque $10^{-6} = 0{,}000\,001$.

El **logaritmo en base a de un número** x es el número, y, al que hay que elevar a para obtener x:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Observa que el número x debe ser siempre positivo, puesto que es una potencia de base positiva.

Cuando la base es 10, el logaritmo se denomina **decimal** y se escribe simplemente **log x.** Hay otra base importante, el número irracional e, que da nombre a los logaritmos **neperianos,** que se escriben como **ln x** o, en ocasiones, **L x.**

Los números rojos

El relojero y astrónomo suizo Jost Bürgi (1552-1632) y el matemático escocés John Neper (1550-1617) construyeron de forma independiente tablas de logaritmos a partir de los trabajos de Michael Stifel (1487-1567). Tomaron bases próximas a la unidad, ya que, de esta forma, las potencias enteras de dichas bases también están muy próximas entre sí.

Bürgi elaboró una tabla de valores para $1{,}0001^n$, escribiendo los exponentes en tinta roja, y los resultados, en tinta negra. Por esta razón, llamó a los logaritmos *números rojos*. A partir de esta tabla desarrolló la de logaritmos en base 1,0001.

Neper utilizó como base 0,999 999 9. Como ves, ambas bases están muy cerca de la unidad.

Neper publicó sus tablas en 1614, en la obra titulada *Mirificilogarithmorum canonis descriptio* y, después de su muerte, apareció *Mirifici ipsius*.

Ejemplos

a) *Calcular $\log_2 16$, $\log_{\sqrt{3}} (1/27)$ y $\ln \sqrt[3]{e^2}$.*

- $\log_2 16 = 4$, puesto que $2^4 = 16$.
- $\log_{\sqrt{3}} (1/27) = -6$, puesto que $(\sqrt{3})^{-6} = 1/27$.
- $\ln \sqrt[3]{e^2} = 2/3$, puesto que $e^{2/3} = \sqrt[3]{e^2}$.

b) *Averiguar el valor de x en las siguientes igualdades:*

- $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \cong 7{,}389\,056\,1$
- $\log_x 1\,000 = 3 \Rightarrow x^3 = 1\,000 \Rightarrow x = 10$
- $\log x = \pi \Rightarrow x = 10^{\pi} \cong 1\,385{,}455\,731$

Actividades

47 Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_{1/3} \sqrt{3}$ ***c)*** $\log_{\sqrt{3}} 729$

b) $\log_2 0{,}0625$ ***d)*** $\log_{1/5} \sqrt[3]{78\,125}$

Solución: ***a)*** $-1/2$ ***b)*** -4 ***c)*** 12 ***d)*** $-7/3$

48 Calcula x en estos logaritmos:

a) $\log_x 1\,024 = 5$ ***c)*** $\log_{2/5} x = -1$

b) $\log_x \left(\dfrac{1}{2\,187}\right) = 7$ ***d)*** $\log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{2}{3}$

Solución: ***a)*** $x = 4$ ***b)*** $x = 1/3$ ***c)*** $x = 5/2$ ***d)*** $x = \sqrt[3]{2}$

49 Ordena de menor a mayor las siguientes expresiones:

$\log_4 2$, $\log_2 (1/2)$, $\log_4 (1/8)$, $\log_2 2$, $\log_3 9$, $\log_{1/4} 2$, $\log_{1/9} 1$, $\log_{1/4} (1/8)$, $\log_{1/2} 8$

Solución: $\log_{1/2} 8 < \log_4 (1/8) < \log_2 (1/2) < \log_{1/4} 2 < \log_{1/9} 1 < \log_4 2 < \log_2 2 <$ $< \log_{1/4} (1/8) < \log_3 9$

Propiedades de los logaritmos y de sus operaciones

- Dos números distintos tienen logaritmos distintos: si $x \neq y \Rightarrow \log_a x \neq \log_a y$. Y además, si $x > y$ entonces $\log_a x > \log_a y$ si $a > 1$.
- El logaritmo de la base siempre es 1: $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$.
- El logaritmo de 1 es cero en cualquier base: $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.
- El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los factores.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

- El **logaritmo de un cociente** es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

- El **logaritmo de una potencia** es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

- El **logaritmo de una raíz** es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

Ejemplo

c) *Desarrollar* $\log_a \dfrac{x^3 \cdot 3y}{\sqrt{z}}$.

$$\log_a \frac{x^3 \cdot 3y}{\sqrt{z}} = \log_a (x^3 \cdot 3y) - \log_a \sqrt{z} = \log_a x^3 + \log_a 3y - \log_a \sqrt{z} =$$

$$= 3 \log_a x + \log_a 3 + \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z$$

Cambio de base

Las calculadoras trabajan con logaritmos decimales y neperianos, por eso conviene expresar un logaritmo de base cualquiera en bases 10 o e.

Si $y = \log_a x$ entonces $x = a^y$. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x = \log a^y \Rightarrow \log x = y \log a$$

Como $y = \log_a x$, sustituyendo se obtiene $\log x = \log_a x \cdot \log a$, por tanto:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Lo mismo se obtiene con logaritmos en otra base: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$.

Ejemplo

d) $\log_3 45 = \log 45 / \log 3 = 3{,}464\ 973\ 521$

Actividades

50 Expresa como un solo logaritmo $3 \ln a - (1/2) \ln b + 5 (\ln a - (1/2) \ln b)$.

Solución: $\ln (a^8/b^3)$

51 Calcula:

a) $\log_{1/2} 0{,}006$ ***b)*** $\log_{0,3} \sqrt[5]{52}$

Solución: ***a)*** 7,38 aprox. ***b)*** $-0{,}66$ aprox.

Logaritmos con la calculadora

En las calculadoras científicas hay dos teclas para calcular logaritmos:

- LOG para logaritmos decimales.
- ln para logaritmos neperianos.

Para calcular potencias de base 10 o potencias de base e, es necesario pulsar previamente la tecla que permite el paso a la segunda función, que, según la calculadora, puede ser:

INV , SHIFT o 2ndF

Así, para calcular log 54,7, basta con pulsar lo siguiente:

LOG 54,7 =

El resultado aparecerá en el visor:

1,737987326

Para calcular e^{π}, se activa la función exponencial, pulsando previamente la tecla de segunda función:

SHIFT e^x π =

En el visor aparecerá:

23.14069263

Observa

Si $x = b$, entonces:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

y se deduce lo siguiente:

$\log e \cdot \ln 10 = 1$