Ejercicios resueltos

Demostración de identidades trigonométricas

Para realizar demostraciones trigonométricas, se recomienda aplicar el siguiente procedimiento:

- No hay que **mezclar** los dos miembros de la igualdad, es decir, iniciar la demostración a un lado del signo igual para llegar al otro. Es recomendable empezar por el que ofrece más posibilidades de transformación.
- Una vez decidido en qué miembro trabajamos, hay que determinar qué expresiones se pueden sustituir aplicando los contenidos que se han trabajado en la unidad.
- Se han de usar todos los procedimientos de cálculo necesarios para obtener la expresión más simple posible.
- Conviene comparar el resultado obtenido con el otro miembro de la igualdad e **identificar** los dos miembros de esta.

1. Demostrar la siguiente igualdad
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\operatorname{tg}2\alpha$$

Se inicia la demostración en el miembro de la izquierda, sustituyendo las expresiones $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ y $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

Se sustituye tg ($\pi/4$) por su valor, 1; se reduce a común denominador y se realizan todas aquellas operaciones necesarias para simplificar al máximo:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}{(1-\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha)}=$$

$$=\frac{1+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-(1-2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Se identifica la expresión obtenida con el segundo miembro:

$$2\operatorname{tg}2\alpha=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Así, es fácil obtener directamente la demostración:

$$\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$$

2. Si A, B, C son los ángulos de un triángulo, comprobar:
$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(B+C)=0$

Hay que tener en cuenta que $180°=A+B+C$, por lo que $B+C=180°-A$. De este modo, lo que hay que demostrar es:

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(180°-A)=0$$

Para ello, se sustituye tg ($180°-A$):

$$\operatorname{tg}(180°-A)=\frac{\operatorname{tg}180°-\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}180°\cdot\operatorname{tg}A}$$

Como $\operatorname{tg}180°=0$, resulta:

$$\operatorname{tg}A+\frac{0-\operatorname{tg}A}{1+0}=\operatorname{tg}A-\frac{\operatorname{tg}A}{1}=0$$

Atención: **la tangente de una diferencia de ángulos no es la diferencia de las tangentes.** Si se hubiese cometido este error en la igualdad propuesta, la demostración hubiera sido incorrecta.

Cálculo de razones trigonométricas a partir de las de ángulos sencillos

3. Sabiendo que el seno de un ángulo del tercer cuadrante es $-\frac{\sqrt{2}}{3}$, calcular el seno de su ángulo doble y la tangente de su ángulo mitad.

Dado que sen $2\alpha = 2$ sen $\alpha \cdot \cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, es necesario averiguar $\cos\alpha$.

A partir de la expresión fundamental de la trigonometría, y recordando que el coseno de un ángulo del tercer cuadrante es negativo:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{2}{9}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Para hallar sen 2α, se sustituye:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{14}}{9} \cong 0{,}83$$

Para determinar el signo de $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, hay que tener en cuenta que, si α pertenece al tercer cuadrante, entonces $\frac{\alpha}{2}$ pertenece al segundo cuadrante, con lo que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$. Por tanto:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{7}}{3}}{1-\frac{\sqrt{7}}{3}}} \cong -3{,}99$$

4. Dados dos ángulos, α y β, *con* $\pi/2 < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < 3\pi/2$, y de los cuales se conocen sen $\alpha = 2/5$ *y* cos $\beta = -1/3$, hallar cos $(\alpha + \beta)$.

Dado que $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$, este ejercicio se reduce a determinar $\cos\alpha$ y sen β, teniendo en cuenta el cuadrante al que pertenecen estos ángulos.

Como α se encuentra en el segundo cuadrante:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Y como β pertenece al tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\beta = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Sustituyendo:

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cong -0{,}07$$

Aplicación de los teoremas del seno y del coseno

5. Sobre un cuerpo de 10 kg de masa actúan dos fuerzas, una de 30 N y otra de 50 N, que forman entre sí un ángulo de 40°. ¿Qué aceleración le comunican al cuerpo?

La segunda ley de Newton enuncia que $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$, donde $\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo de masa *m*, y $\vec{a}$, la aceleración que le comunica. Dicha resultante es la suma de las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo (figura 4.19).

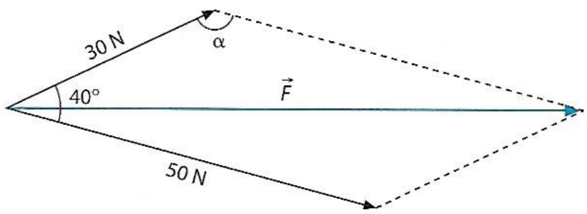

FIGURA 4.19.

En este caso:

$$\alpha + \alpha + 40° + 40° = 360°$$
$$\alpha = 140°$$

Por tanto, podemos calcular la resultante a partir del teorema del coseno:

$$|\vec{F}|^2 = 30^2 + 50^2 - 2\cdot 30\cdot 50\cdot\cos 140° \Rightarrow |\vec{F}| \cong 75{,}49 \text{ N}$$
$$|\vec{F}| = m\cdot\vec{a} \Rightarrow 75{,}49 \text{ N} = 10 \text{ kg}\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cong 7{,}55 \text{ m/s}^2$$

Ejercicios resueltos

6. Determinar el perímetro de un triángulo inscrito en una circunferencia de 2,5 cm de radio, sabiendo que uno de sus lados mide 4 cm y que, de los otros dos lados, uno es el triple que el otro.

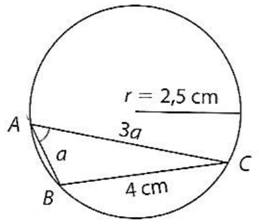

FIGURA 4.20.

De entrada, no parece posible calcular A por falta de datos, ya que, para resolver un triángulo, hay que conocer, al menos tres de sus elementos.

Sin embargo, debes recordar que todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales, por lo que podemos dibujar otro triángulo inscrito con el mismo ángulo A y uno de cuyos lados sea un diámetro (figura 4.21).

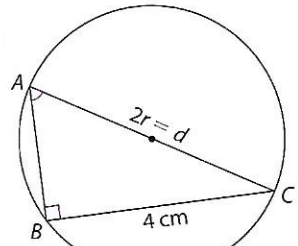

FIGURA 4.21.

Dado que el ángulo inscrito que abarca un diámetro vale 90°, podemos escribir:

$$\frac{4}{\text{sen } A} = 2 \cdot 2{,}5 \Rightarrow \text{sen } A = \frac{4}{5} \Rightarrow A \cong 53{,}13° \text{ y } A' \cong 126{,}87°$$

Las dos soluciones son válidas, lo cual significa que el dibujo inicial está incompleto. Retomándolo y dibujando los dos triángulos, se obtiene la figura 4.22.

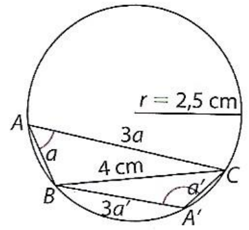

FIGURA 4.22

Como el objetivo del ejercicio es encontrar el perímetro del triángulo inscrito, procedemos a aplicar el teorema del coseno para hallar a y a' en cada uno de los triángulos solución:

Triángulo ABC: teniendo en cuenta que $\cos A = 3/5$

$$16 = a^2 + (3a)^2 - 2a \cdot 3a \cdot (3/5) \;\Rightarrow\; a = \sqrt{2{,}5} \cong 1{,}58 \text{ cm}$$

De este modo, el perímetro de $ABC \cong 10{,}32$ cm.

Triángulo $A'BC$: teniendo en cuenta que $\cos A' = -3/5$

$$16 = (a')^2 + (3a')^2 - 2a' \cdot 3a' \cdot (-3/5) \;\Rightarrow\; a' \cong \sqrt{1{,}76} \cong 1{,}08$$

De este modo, el perímetro de $A'BC \cong 8{,}34$ cm.

Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas

7. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} y} \\ 2 \text{ sen } x = \sqrt{2} - \cos y \end{cases}$$

Para resolver este sistema, observamos que de la primera ecuación, se debe cumplir que los ángulos x e y son complementarios, luego $x + y = 90°$.

Teniendo esto en cuenta, resulta que $\cos y = \text{sen } x$, por lo que la segunda ecuación se convierte en:

$$2\text{sen } x = \sqrt{2} - \text{sen } x \Rightarrow 3 \text{ sen } x = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } x = \sqrt{2}/3$$

Para el valor de x se obtiene: $\begin{cases} x \cong 28° \, 7' \, 32'' + k \cdot 360° \\ x \cong 151° \, 52' \, 28'' + k \cdot 360° \end{cases} \; k \in \mathbb{Z}$

Si $\text{sen } x = \sqrt{2}/3$, entonces $\cos y = \text{sen } x = \sqrt{2}/3$, por lo que para el valor de y se obtienen los ángulos complementarios de x:

$$\begin{cases} y \cong 61° \, 52' \, 28'' + k \cdot 360° \\ y \cong 298° \, 7' \, 32'' + k \cdot 360° \end{cases} \; k \in \mathbb{Z}$$