Ejemplo: Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+3 & si \quad x\le 2 \\ 1 & si \quad 2<x<4 \\ -x+5 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

Las tres funciones que forman $f(x)$, que son $y=-(x-1)^2+3$, la función $y=1$ y la función $y=-x+5$ por separado, son polinómicas y por lo tanto, continuas en su dominio. Con esto, podemos asegurar que la función $f(x)$ será, por lo menos, continua en $(-\infty,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$

Vamos a ver qué ocurre en los puntos $x=2$ y $x=4$

Veremos si $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ y si $\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)$

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} -(x-1)^2+3=-(2-1)^2+3=2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 1=1$

No coinciden, por lo tanto, $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

Hay una discontinuidad de salto finito en $x=2$.

b) $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-} 1=1$

$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} -x+5=-4+5=1$

Coinciden, $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=1\Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=1$

Además, como $f(4)=1$ vemos que $f(x)$ es continua en $x=4$

Ejemplo: Estudio de la continuidad de una función definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-4 & si \quad x\leq 1 \\ e^{x-1}-2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a ver la continuidad en cada uno de los trozos, y a continuación, veremos qué ocurre en los puntos de "conexión" (en este caso, en x=1)

La función $y=x^2+x-4$ es una función polinómica y por lo tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$ luego en el intervalo que nos interesa, que es $(-\infty,1)$ (que es donde se define la función $f(x)$ propuesta) será continua.

La función $y=e^{x-1}$ es una función continua (la función $y=e^x$ es continua y restar 1 a la variable no modifica la función, sólo la desplaza a la izquierda); $y=e^{x-1}-2$ es la diferencia de dos funciones continuas ($y=e^{x-1}$ y de $y=2$), luego es también continua.

Así, podemos asegurar ya que la función f(x) es continua en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Vamos a estudiar la continuidad de la función $f(x)$ (definida a trozos), en el punto $x=1$. Recuerda que la definición nos dice que será continua si $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Por tanto, calculamos en primer lugar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+x-4=1^2+1-4=-2$$

Para el límite por la izquierda, la función $f(x)$, antes de llegar al valor 1 sólo toma valores de la primera de las dos funciones que componen $f(x)$. Por eso se sustituye en la función x^2+x-4

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{x-1}-2=e^{1-1}-2=-1$$

De igual forma, la función $f(x)$, para valores más grandes que 1, sólo toma valores de la segunda de las dos funciones que componen $f(x)$. Por eso se sustituye en la función $e^{x-1}-2$ para calcular el límite por la derecha.

No coinciden los límites laterales, por lo que no será continua en $x=1$.

Presenta una discontinuidad de salto finito.