PREPARANDO LO BÁSICO - TEMA 2

Vamos a tratar de preparar lo básico de este tema. Propondré la visualización de unos vídeos y la realización de unos ejercicios. Esta vez los ejercicios van a ser del libro, por lo que el solucionario está en el aula virtual, pero si no entendieras algo siempre puedes preguntar en clase. Ánimo y a trabajar.

1. Polinomios. Factorización

El vídeo que vamos a ver a continuación nos muestra la factorización de un polinomio con término independiente, así como aquellos casos en los que vamos a utilizar la regla de Ruffini para factorizar el polinomio. Además vamos a aclarar que hacer si no tenemos término independiente y algunos casos en los que la factorización puede hacerse de forma directa, sin utilizar lo anterior.

Vamos a ver algunos ejemplos de estos casos.

Supongamos que nos piden factorizar el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2$.

De entrada vemos que el polinomio no tiene término independiente, por lo que vamos a proceder a sacar factor común la x elevada al menor exponente que tenga.

$$P(x) = 3x^4 - 12x^2 = x^2 \cdot (3x^2 - 12)$$

El x^2 que hemos sacado factor común es un factor asociado a $x - 0$, luego el cero es raíz doble de este polinomio.

Luego podemos seguir factorizando el polinomio, que como es un polinomio de grado dos le buscaremos las raíces resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado.

$$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 12 \Longrightarrow x^2 = \frac{12}{3} \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Luego $x = 2$ y $x = -2$ son raíces del polinomio que nos daban y la factorización será **(no se te olvide poner el número que multiplica a x^4 delante en la factorización)**

$$P(x) = 3x^4 - 12x^2 = \mathbf{3}x^2(x-2)(x+2)$$

Hay también casos en los que puedo ver la factorización recordando las igualdades notables, pero al revés, por ejemplo:

$$P(x) = x^3 - 9x \Longrightarrow P(x) = x(x^2 - 9) \Longrightarrow P(x) = x(x+3)(x-3)$$

en la que he usado lo de suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados. Otro ejemplo sería

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 \Longrightarrow P(x) = (x-3)^2$$

donde vemos lo del cuadrado de la diferencia. O bien

$$P(x) = x^2 + 4x + 4 \Longrightarrow P(x) = (x+2)^2$$

para el caso de la suma.

Esto puede aparecernos en medio de una factorización, pero no tengas miedo si crees que no vas darte cuenta de eso, pues puedes aplicar Ruffini o resolver la ecuación correspondiente y te saldrá lo mismo.

Vamos a ver un vídeo en el que nos cuentan como funciona eso de Ruffini.

Para practicar haz los ejercicios del libro 1, 2, 3, 4, 5, 40, 41 y 42.

Recuerda, si no sabes hacerlos mentalmente hazlo por Ruffini o resolviendo la ecuación.

2. Aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado

En este apartado suponemos que conoces perfectamente la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado. Vamos a ver tres vídeos en los que nos explican como resolver ecuaciones de segundo grado incompletas, ecuaciones bicuadradas, racionales e irracionales.

Incompletas y bicuadradas

Racionales e irracionales

Irracionales con dos raíces

Espero que los vídeos hayan sido lo suficientemente claros.

Vamos a practicar. Realiza los ejercicios del libro 13, 14, 15, 50, 51 y 52.

También tenemos sistemas de ecuaciones no lineales que se terminan resolviendo utilizando ecuaciones de segundo grado o bicuadradas.

Vamos a ver los siguientes vídeos que nos aclaran algunos de los casos.

Una circunferencia y una hipérbola

Una lineal y otra no

Vamos a practicar realizando los ejercicios del libro 16, 53, 54 y 55.

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Seguimos con nuestra enseñanza guiada. Vamos a ver ahora otros vídeos correspondientes a las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En ellos nos explican los diferentes casos en las ecuaciones exponenciales. La manera de distinguir cada tipo es la siguiente:

a) Primero vemos si las potencias que aparecen pueden ponerse con la misma base. Por ejemplo:

$$3^{x+2} + 3^x = 90 \qquad \text{o bien} \qquad 4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$$

Si te fijas, en la primera la base va a ser 3 y en la segunda 2, pues $4 = 2^2$, con lo que podemos poner $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. En el primer caso haremos el cambio $u = 3^x$ y en el segundo el cambio $u = 2^x$.

Si hacemos eso nos quedará en cada caso,

$$3^x \cdot 3^2 + 3^x = 90 \qquad \text{o bien} \qquad (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$$

$$9\,u + u = 90 \qquad \text{o bien} \qquad u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$$

Si te fijas, en el primer ejemplo tenemos una ecuación de primer grado y en el segundo una de segundo grado. Se resuelven y se deshace el cambio. Vamos a ver cada una por separado.

$$\begin{aligned}
3^{x+2} + 3^x &= 90 \\
3^x \cdot 3^2 + 3^x &= 90 \\
9u + u &= 90 \\
10u &= 90 \\
u &= 9
\end{aligned}$$

Por tanto $u = 9 \Longrightarrow 3^x = 9 \Longrightarrow 3^x = 3^2 \Longrightarrow x = 2$ Vamos a hacer lo mismo con la otra ecuación.

$$\begin{aligned}
4^x - 7 \cdot 2^x - 8 &= 0 \\
(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 &= 0 \\
u^2 - 7 \cdot u - 8 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado nos da como soluciones $u = 8$ y $u = -1$. Deshaciendo el cambio para cada caso tenemos:

- $u = 8 \Longrightarrow 2^x = 8 \Longrightarrow 2^x = 2^3 \Longrightarrow x = 3$.
- $u = -1 \Longrightarrow 2^x = -1$ que no tiene solución (La exponencial siempre es estrictamente positiva).

b) El otro caso posible es que no pueda encontrar una base común o al despejar no pueda poner la misma base en ambos lados de la igualdad. Por ejemplo.

$$7^{x-1} - 2^x = 0$$

Vamos a tomar logaritmos para conseguir quitar la x del exponente. De esta forma tendremos una ecuación, en nuestro caso de primer grado, cuya incógnita es x. Vamos a resolverla.

$$\begin{aligned}
7^{x-1} - 2^x &= 0 \\
7^{x-1} &= 2^x \\
lg\, 7^{x-1} &= lg\, 2^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-1)\cdot lg\,7 &= x\cdot lg\,2\\ x\cdot lg\,7 - lg\,7 &= x\cdot lg\,2\end{aligned}$$

Si no queremos liarnos podemos sustituir $lg\,2 = 0'3010$ y $lg\,7 = 0'8451$ antes de seguir. Por tanto.

$$0'8451x - 0'8451 = 0'3010x \Longrightarrow 0'8451x - 0'3010x = 0'8451 \Longrightarrow 0'5441x = 0'8451 \Longrightarrow x = 1'55$$

Para practicar resuelve los ejercicios del libro 19, 20, 56, 57 (sin el apartado c)), 58 (sin el apartado a)) y 59 (sin el apartado c)).

4. Inecuaciones polinómicas y racionales

Para entender los ejercicios de inecuaciones vamos a ver los siguientes vídeos. Después os propondré unos ejercicios del libro para poner en práctica lo aprendido.

Inecuaciones polinómicas y racionales

Inecuaciones racionales más complejas

Muy importante tener en cuenta que **las raíces del denominador nunca pueden estar entre las soluciones, por tanto, el intervalo cuyo extremo sea una raíz del denominador siempre estará abierto**, pues de esa forma excluimos dicho valor de la solución. De todas formas esto sólo se va a producir en inecuaciones racionales cuyo signo de desigualdad sea $\leqslant$ o $\geqslant$.
Como siempre, si tienes algún problema recurre a mi, pero creo que se tratan en estos vídeos las ideas principales. Vamos a practicar con los siguientes ejercicios del libro: 23, 24, 25, 61, 62, 63, 93 y 94.

5. Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss

Yo prefiero, aunque no hayamos visto nunca las matrices, aplicar el método de Gauss para resolver sistemas usando matrices. La idea es la misma que si usas las ecuaciones, pero creo que sólo viendo números resulta más sencillo.
Nosotros sólo vamos a tratar sistemas compatibles determinados, es decir, aquellos que tienen

solución única, que como bien sabes, es una terna de valores los que forman dicha solución (un valor para x, otro para y y otro para z). Vamos a ver el vídeo y luego pondremos en práctica lo aprendido.

Los ejercicios que vamos a realizar en este caso son 28, 29, 30, 66 y 67.