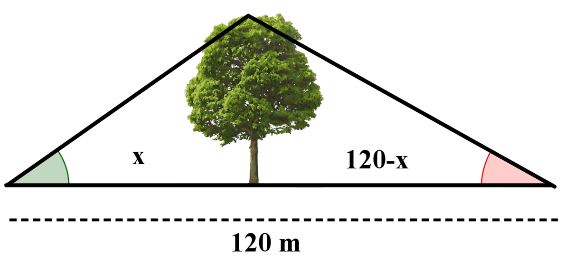
PREPARANDO LO BÁSICO - TEMA 4

Vamos a tratar de preparar lo básico de este tema. Propondré la visualización de unos vídeos y la realización de unos ejercicios. Al final están las soluciones (*no las mires hasta que hayas acabado el ejercicio*) , pero si no entendieras algo siempre puedes preguntar en clase. Ánimo y a trabajar.

1. **Altura inaccesible**

   Lo mejor de este tipo de problemas es que siempre pueden hacerse de la misma forma. Hay que plantear un sistema de ecuaciones usando dos triángulos rectángulos, pues hay dos incógnitas, y en ambos se usa la tangente. Vamos a ver un vídeo que nos muestra un ejemplo y después nos plantearemos resolver unos ejercicios.

   Recuerda, tienes que localizar los dos triángulos y cada uno nos da una ecuación utilizando la definición de tangente en un ángulo en un triángulo rectángulo.
   Tienes que tener cuidado si las observaciones se hacen desde un mismo sitio del objeto (como muestra el vídeo) o desde lados distintos al objeto, como puedes ver en la imagen siguiente.



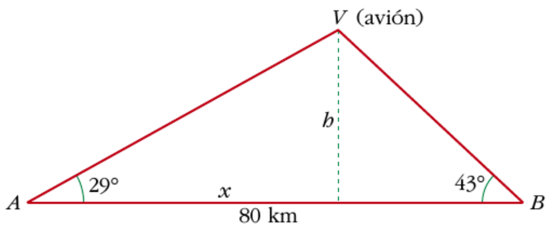
   Si te fijas el cambio está en las bases de los triángulos. En el caso del vídeo la base es $30 + x$ y en el dibujo $120 - x$. Por lo demás todo funciona de forma análoga. Vamos a por los ejercicios.

a) Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100 m. ¿Cuál es la altura si los ángulos son 33º y 46º?

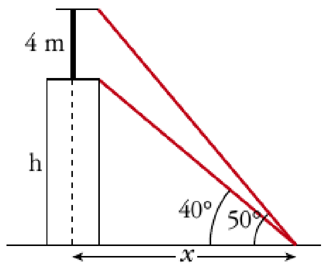
b) Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de 60º y 47º, ¿a qué altura vuela el avión?

c) Estamos en A, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42º), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35º). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él? Observa la ilustración.

d) Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29º y 43º con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?



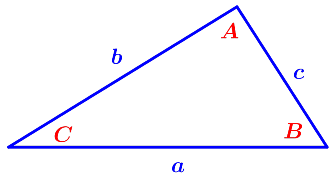
e) En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 50º con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40º con la horizontal. Calcula la altura del edificio.



También puedes hacer del libro los ejercicios 4, 27, 68, 69 y el resuelto 17 de la página 99. Mira sus soluciones en el aula virtual.

2. Resolución de triángulos no rectángulos

Hasta ahora hemos estado viendo triángulos rectángulos, pero ahora vamos a centrarnos en calcular todos los datos (ángulos y lados) de un triángulo cualquiera. Tienes que tener en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Un triángulo se nombra con los lados enfrente de los ángulos del mismo nombre, como en el dibujo.



Para calcular dichos datos tenemos dos teoremas: El teorema de los senos y el teorema del coseno. Vamos a recordarlos

- **Teorema de los senos:** Relaciona los lados lados de un triángulo con los ángulos opuestos y sirve para resolver triángulos en los que conozcamos un lado y su ángulo opuesto (**No olvides que si conoces dos ángulos puedes conocer el tercero restándole a 180º la suma de los dos ángulos que conoces**). El teorema dice:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

  Al resolver un triángulo por este teorema puede ocurrir que si vamos a calcular un ángulo valga el que nos sale del primer cuadrante y el que tiene el mismo valor del seno en el segundo cuadrante (sumados el que conocías y el que acabas de sacar del segundo cuadrante no pasas de 180º). Para ver esto tienes un ejemplo muy útil en el libro (Ejercicio resuelto 4 página 89).

- **Teorema del coseno:** Es una generalización del teorema de Pitágoras. Sirve, bien para calcular un lado conocidos los otros dos y el ángulo opuesto al primero, o bien para calcular un ángulo conocido los tres lados. Podemos expresarlo así:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Lo suyo es que, teniendo en cuenta estos dos teoremas, me busque la vida para resolver el ejercicio o problema que me planteen. De todas formas voy a ponerte cuatro vídeos que te dicen como actuar en cada caso que puede producirse.

Caso 1

Caso 2

Caso 3

Caso 4

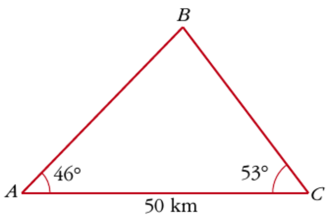
Una vez visto los vídeos, a los que puedes recurrir cada vez que quieras, nos ponemos a trabajar.

a) Calcula cuanto mide el lado b de un triángulo cuyo lado $a = 12$ cm, $c = 7$ cm y el ángulo $B = 108^o$.

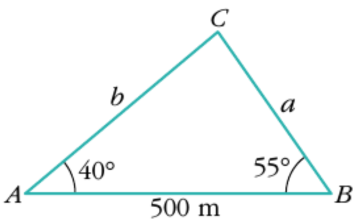
b) Resuelve los siguientes triángulos:

- $a = 12$ cm, $b = 16$ cm y $c = 10$ cm.
- $a = 7$ cm, $b = 22$ cm y $C = 40^o$.
- $a = 4$ cm, $B = 45^o$ y $C = 60^o$.

c) Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: BAC $= 46^o$ y BCA $= 53^o$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



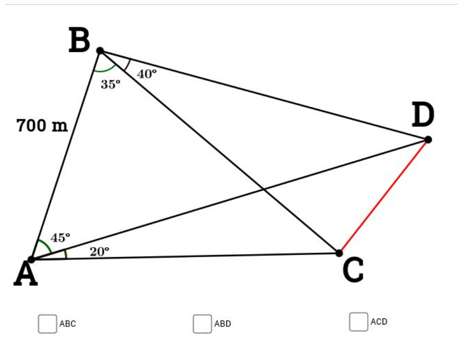
d) Dos amigos situados en dos puntos, A y B, que distan 500 m, ven la torre de una iglesia, C, bajo los ángulos BAC $= 40^o$ y ABC $= 55^o$. ¿Qué distancia hay entre cada uno de ellos y la iglesia?



Además puedes hacer del libro los ejercicios 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 59, 63 y 70. Como siempre busca sus soluciones en el aula virtual.

3. Cálculo de distancias entre dos puntos inaccesibles

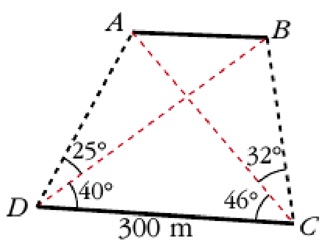
Es el tipo más complejo de este tema. La razón es que necesita decidirse un triángulo sobre el que trabajar y para calcular los datos que faltarán en ese triángulo necesitaremos hacerlo previamente usando otros dos. Sería buena idea que siguieras las ideas que te presentan en la siguiente animación de Geogebra.



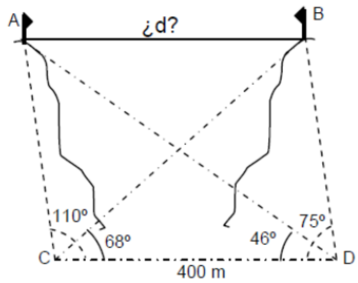
Vamos a ver también el vídeo que nos explica como resolver el problema.

Espero que te haya quedado claro. Vamos a hacer los ejercicios.

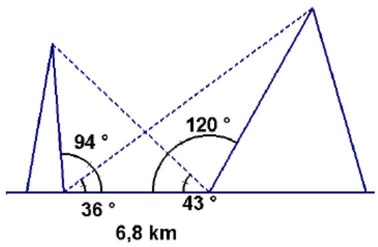
a) Para hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B, fijamos dos puntos C y D tales que CD = 300 m, y medimos los siguientes ángulos: ADB = 25º, BDC = 40º, ACD = 46º y ACB = 32º



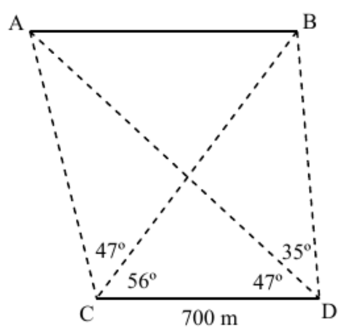
b) Se desea calcular la distancia entre dos cimas de montañas con objeto de construir un teleférico. Desde el valle se obtiene por medición directa los datos que aparecen en la figura. Calcular la distancia AB.



c) Dos montañeros han ascendido en fines de semana sucesivos a dos picos, A y B, y querrían saber la distancia entre dichos picos. Para ello han medido desde las bases de las montañas los ángulos indicados en la figura. Sabiendo que la distancia entre las bases dichas es de 6800 m, ¿qué distancia hay entre los picos?



d) Se desea calcular la distancia entre las cimas de dos montañas A y B. Para ello, desde los puntos C y D separados 700 m y situados en una planicie, se miden los ángulos de la figura. Determina la distancia entre las cimas A y B.



Además puedes hacer del libro los ejercicios 24, 46 y problema resuelto 18 (página 99). Como siempre, comprueba las soluciones en el aula virtual.

SOLUCIONES

1. **Altura inaccesible**

   a) La altura es de 174’16 m.

   b) La altura es de 556’35 m.

   c) La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

   d) El avión está a 27’8 km de altura.

   e) La altura del edificio es 9,52 m.

2. **Resolución de triángulos no rectángulos**

   a) 14’7 cm.

   b)
   - $A = 48^{o}\,30'\,33''$, $B = 92^{o}\,51'\,57''$ y $C = 38^{o}\,37'\,29''$.
   - $c = 17'24$ cm, $A = 15^{o}\,7'\,44''$, $A = 124^{o}\,52'\,15''$.
   - $A = 75^{o}$, $b = 2'93$ m, $c = 3'59$ m.

   c) 36’4 km y 40’4 km.

   d) 322,62 m y 411,14 m.

3. **Cálculo de distancias entre dos puntos inaccesibles**

   a) La distancia de A a B es de 156’96 m.

   b) La distancia es de 487’44 m.

   c) La distancia es de 12309’5 m.

   d) La distancia es de 821’44 m.