1. $y = \dfrac{x^2+11}{x+5}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.
Por tanto:
$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

2) **Simetría:** A simple vista, como el denominador no es simétrico, podemos decir que no va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:
$$f(-x) = \frac{(-x)^2+11}{-x+5} = \frac{x^2+11}{-x+5}$$
Esta expresión no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por tanto no es simétrica.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**
Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
$$\frac{x^2+11}{x+5} = 0 \Longrightarrow x^2 + 11 = 0 \Longrightarrow \text{No hay solución}$$
Luego no corta al Eje X.
Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
$$y = \frac{0+11}{0+5} = \frac{11}{5}$$
Luego corta al Eje Y en el punto $\left(0, \dfrac{11}{5}\right)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raices del numerador y del denominador:
   - Raices del numerador $\longrightarrow$ No tiene.
   - Raices del denominador $\longrightarrow$ $x = -5$

   El resultado de las regiones podemos observarlo en el cuadro 1.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:
   - A. Verticales:
     Buscamos entre las raices del denominador. Vamos a ver si es asíntota la recta $x = -5$.

	$(-\infty,-5)$	$(-5,+\infty)$
$\dfrac{x^2+11}{x+5}$	$-$	$+$

Cuadro 1: Estudio del signo de f

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+11}{x+5} = \left[\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -5^-}\frac{x^2+11}{x+5} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to -5^+}\frac{x^2+11}{x+5} = +\infty \end{array}\right.$$

Luego la recta $x=-5$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:
  Veamos que no tiene.
  $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+11}{x+5} = +\infty$$
  $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+11}{x+5} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+11}{-x+5} = -\infty$$

  Por tanto, no tiene.
- A. Oblicuas:
  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

  $$m = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^2+11}{x+5}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+11}{x^2+5x} = 1$$
  $$n = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+11}{x+5}-x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+11-x\cdot(x+5)}{x+5}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{11-5x}{x+5} = -5$$

  Por tanto la recta $y=x-5$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x+5)-(x^2+11)}{(x+5)^2} = \frac{2x^2+10x-x^2-11}{(x+5)^2} = \frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:

	$(-\infty,-11)$	$(-11,-5)$	$(-5,1)$	$(-1,+\infty)$
$\dfrac{x^2+10x-11}{(x+5)^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Cuadro 2: Estudio del signo de la derivada de f

$x^2+10x-11=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=-11$

- Raices del denominador:
  $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 2 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(-\infty,-11)\cup(1,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-11,5)\cup(-5,1)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 2 el signo de la derivada, vemos que pasa de crecer a decrecer en x=-11, luego, como el punto pertenece al dominio, tiene ahí un máximo.
   En x=1 pasa de decrecer a crecer y también es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo.
   La segunda coordenada de cada punto se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

   x=-11 $\longrightarrow y=\dfrac{(-11)^2+11}{-11+5}=\dfrac{121+11}{-6}=\dfrac{132}{-6}=-22$
   x=1 $\longrightarrow y=\dfrac{1^2+11}{1+5}=\dfrac{12}{6}=2$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x+10)\cdot(x+5)^2-(x^2+10x-11)\cdot(x+5)\cdot 2}{(x+5)^4}=$$

$$=\frac{2x^2+10x+10x+50-(2x^2+20x-22)}{(x+5)^3}=\frac{2x^2+20x+50-2x^2-20x+22}{(x+5)^3}=$$

$$=\frac{72}{(x+5)^3}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raices del numerador: No tiene
- Raices del denominador:

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$\dfrac{72}{(x+5)^3}$	$-$	$+$

Cuadro 3: Estudio del signo de la derivada segunda de f

En conclusión, la función es cóncava en el intervalo $(-5, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -5)$.

No hay puntos de inflexión, pues donde cambia el tipo de concavidad no pertenece al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-5\}$

Simetría: No tiene.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

- **Eje X** $\rightarrow$ No corta.
- **Eje Y** $\rightarrow (0, \frac{11}{5})$

Regiones: Son:

- $+ \rightarrow (-5, +\infty)$
- $- \rightarrow (-\infty, -5)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

- **A.V.:** $x = -5$
- **A.H.:** No tiene.
- **A.O.:** $y = x - 5$

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -11) \cup (1, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-11, -5) \cup (-5, 1)$

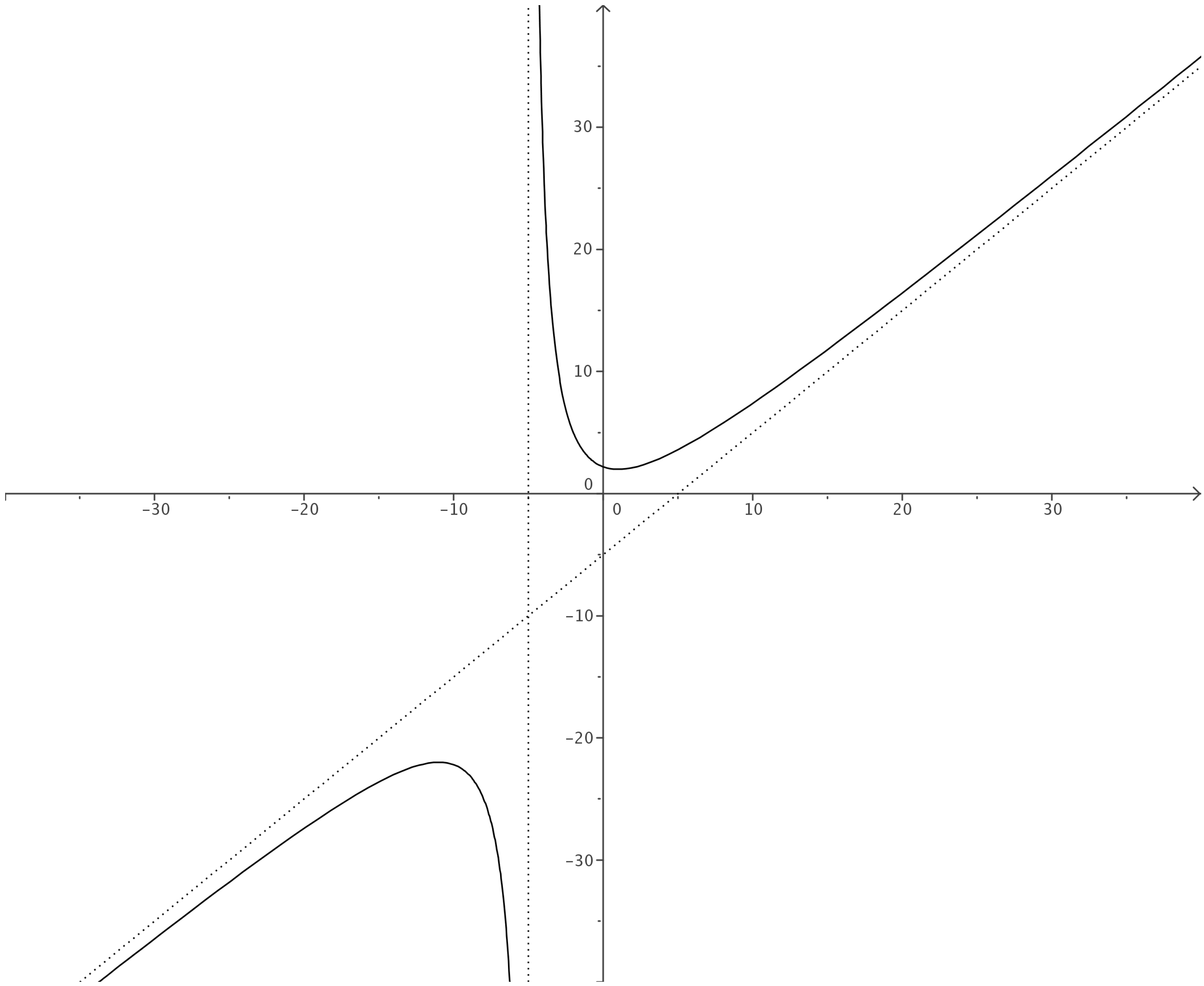
Máximos y mínimos: Son:

- **Máximo** $\rightarrow (-11, -22)$
- **Mínimo** $\rightarrow (1, 2)$

Cóncava $\rightarrow (-5, +\infty)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -5)$

P. Inflexión: No tiene.



2. $y = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.

   Por tanto:
$$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:
$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{9-(-x)^2} = \frac{x^2}{9-x^2} = f(x)$$

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**

   Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
$$\frac{x^2}{9-x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

   Luego corta al Eje X en el punto $(0,0)$.

   Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
$$y = \frac{0}{9} = 0$$

   Luego corta al Eje Y en el punto $(0,0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raices del numerador y del denominador:

   - Raices del numerador $\longrightarrow x = 0$
   - Raices del denominador $\longrightarrow x = \pm 3$

   Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{x^2}{9-x^2}$	$-$	$+$	$+$	$-$

Cuadro 4: Estudio del signo de f

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

  Buscamos entre las raices del denominador. Vamos a ver si son asíntotas las rectas $x = -3$ y $x = 3$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2}{9 - x^2} = \left[\frac{9}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^2}{9 - x^2} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2}{9 - x^2} = +\infty \end{array} \right.$$

  Luego la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2}{9 - x^2} = \left[\frac{9}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2}{9 - x^2} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2}{9 - x^2} = -\infty \end{array} \right.$$

  Luego la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

  Veamos que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{9 - x^2} = -1$$

  En consecuencia, la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

- A. Oblicuas:

  Como tiene asíntota horizontal no puede tener oblicuas.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:

  $18x = 0 \Rightarrow x = 0$

- Raices del denominador:
  $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
$\frac{18x}{(9-x^2)^2}$	$-$	$-$	$+$	$+$

Cuadro 5: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 5 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0, 3) \cup (3, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 5 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:
   x=0 $\longrightarrow y = 0$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{18 \cdot (9 - x^2)^2 - 2 \cdot (-2x) \cdot (9 - x^2) \cdot 18x}{(9 - x^2)^4} =$$
$$= \frac{162 - 18x^2 + 72x^2}{(9 - x^2)^3} = \frac{54x^2 + 162}{(9 - x^2)^3} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raices del numerador: No tiene
- Raices del denominador:
  $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Por tanto la tabla queda como sigue:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$\frac{54x^2 + 162}{(9-x^2)^3}$	$-$	$+$	$-$

Cuadro 6: Estudio del signo de la derivada segunda de f

En conclusión, la función es cóncava en el intervalo $(-3, 3)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

No hay puntos de inflexión, pues donde cambia el tipo de concavidad no pertenece al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Simetría: Par. simétrica respecto Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

- **Eje X** $\rightarrow (0, 0)$
- **Eje Y** $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

- $+ \rightarrow (-3, 0) \cup (0, 3)$
- $- \rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

- **A.V.:** $x = -3$; $x = 3$
- **A.H.:** $y = -1$.
- **A.O.:** No tiene.

Decrecimiento $\rightarrow (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

Crecimiento $\rightarrow (0, 3) \cup (3, +\infty)$

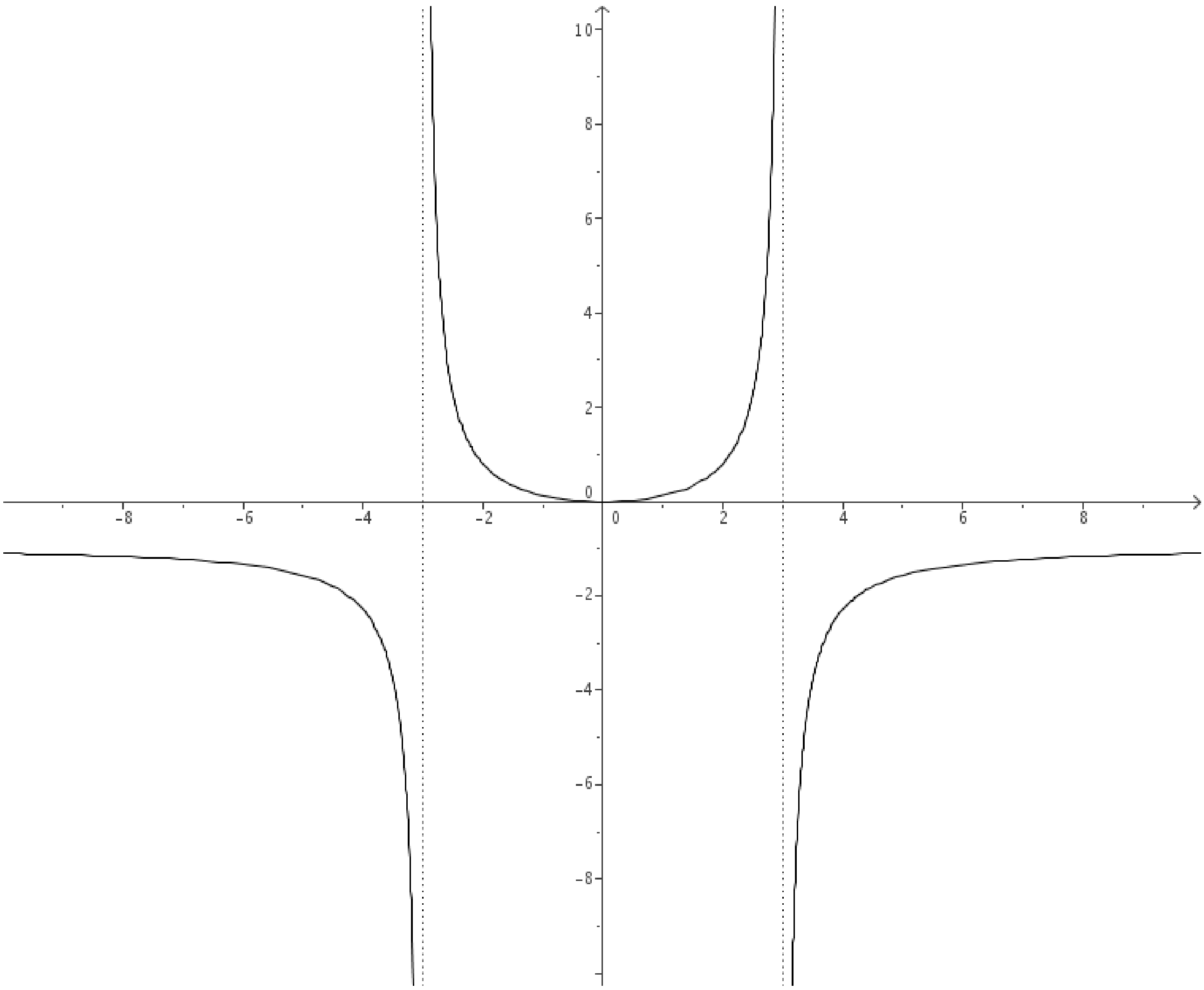
Máximos y mínimos: Son:

- **Máximo** No tiene.
- **Mínimo** $\rightarrow (0, 0)$

Cóncava $\rightarrow (-3, 3)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

P. Inflexión: No tiene.



3. $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como es un cociente del dominio habrá que excluir los valores que anulen el denominador.

   Por tanto:
   $$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

   Luego la función es impar o simétrica respecto del origen.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser un cociente de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**

   Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
   $$\frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Longrightarrow x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

   Luego corta al Eje X en el punto $(0, 0)$.

   Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
   $$y = \frac{0}{0-1} = 0$$

   Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Empezamos por calcular las raices del numerador y del denominador:

   - Raices del numerador $\longrightarrow x = 0$
   - Raices del denominador $\longrightarrow x = \pm 1$

   Por tanto, el signo de f podemos verlo en el cuadro 7.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

   - A. Verticales:

     Buscamos entre las raices del denominador. Vamos a ver si son asíntotas las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{x^3}{x^2-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 7: Estudio del signo de f

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\left[\frac{1}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales:

  Veamos si las tiene.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^3}{x^2-1}=-\infty$$

  Luego no tiene.

- A. Oblicuas:

  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3-x\cdot(x^2-1)}{x+5}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

  Por tanto la recta $y=x$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:
  $x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = \pm\sqrt{3}$
- Raices del denominador:
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

Cuadro 8: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 8 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 8 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = \sqrt{3}$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. Observando en cuadro 8 el signo de la derivada, vemos que pasa de crecer a decrecer en $x = -\sqrt{3}$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un máximo.
   La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

   $\mathbf{x=-\sqrt{3}} \longrightarrow y = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

   $\mathbf{x=\sqrt{3}} \longrightarrow y = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x) \cdot (x^2-1)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (x^2-1) \cdot (x^4 - 3x^2)}{(9 - x^2)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.

- Raices del numerador:
  $2x^3 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$
- Raices del denominador:
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 9: Estudio del signo de la derivada segunda de f

Observando en el cuadro 9 la función es cóncava en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
Hay un sólo punto de inflexión, el $(0, 0)$, pues aunque en x=-1 y en x=1 cambia la concavidad, no hay punto de inflexión por no pertenecer al dominio.

RESUMEN

Dominio $\rightarrow \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Simetría: Impar.

Simétrica respecto del Origen.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (0, 0)$

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$- \rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $x = -1$; $x = 1$

A.H.: No tiene.

A.O.: $y = x$

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow$ $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Máximos y mínimos: Son:

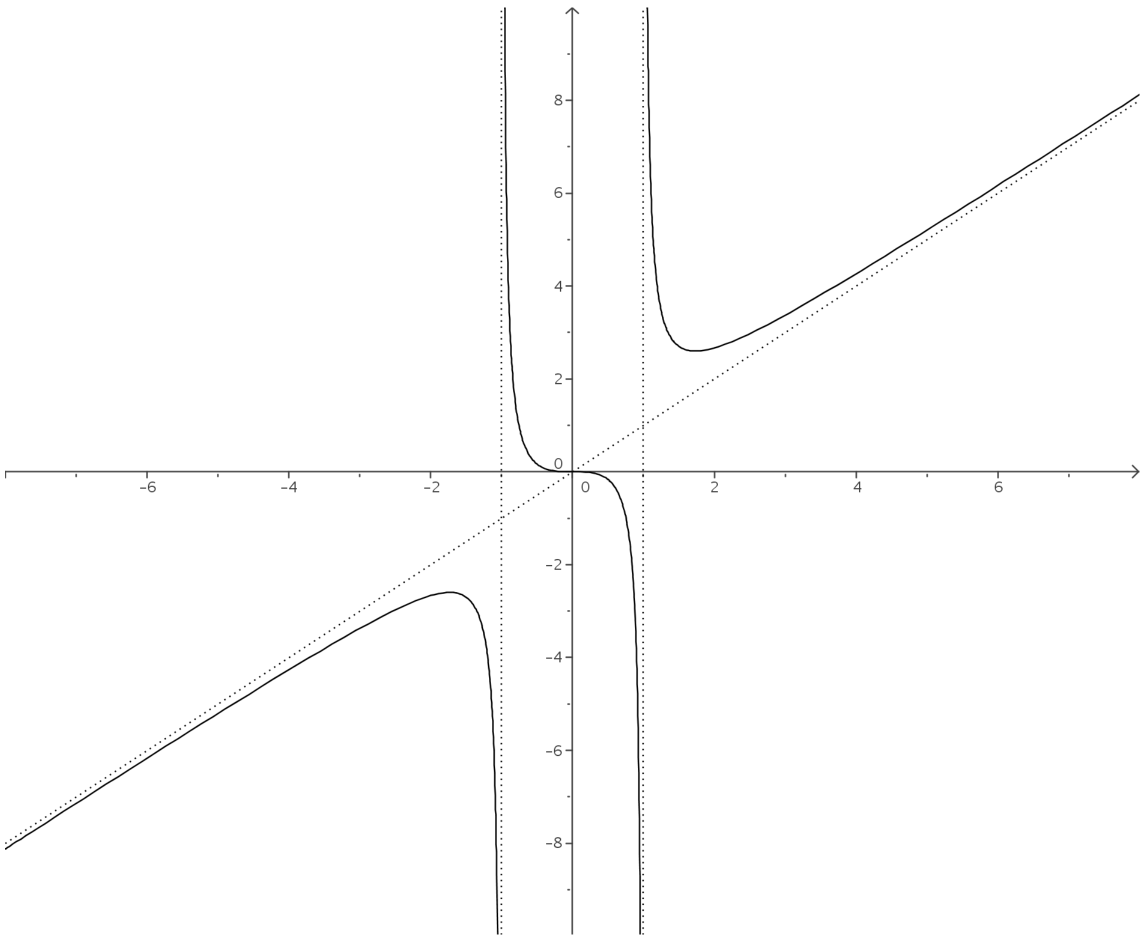
Máximo $\rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mínimo $\rightarrow \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Cóncava $\rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Convexa $\rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

P. Inflexión: $\rightarrow (0, 0)$.



4. $y = \sqrt{x^2+1}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como se trata de una raiz, al dominio pertenecerán los puntos que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero. Como el radicando es siempre mayor o igual que 1 $(x^2+1) \geq 1$, el dominio es todo $\mathbb{R}$.

2) **Simetría:** A simple vista observamos que la función va a ser simétrica. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$$

Luego la función es par o simétrica respecto del Eje Y.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser composición de funciones continuas. Por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

5) **Corte con los ejes:**

Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$\sqrt{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x^2+1 = 0 \Longrightarrow$$

Luego no corta al Eje X.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

$$y = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0,1)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de la raiz positiva, luego la función es positiva en todo $\mathbb{R}$.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:
  En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.
- A. Horizontales:
  Veamos si las tiene.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

Luego no tiene.

- A. Oblicuas:
  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

  Por tanto, cuando $x \longrightarrow +\infty$, la recta $y = x$ es una asíntota oblícua.
  Es un caso un poco particular, pues si calculamos los límites cuando $x \longrightarrow -\infty$ tenemos:
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$$

  Por tanto, cuando $x \longrightarrow -\infty$, la recta $y = -x$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:
  $x = 0$
- Raices del denominador:
  $\sqrt{x^2+1} = 0 \Rightarrow$ No tiene.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$-$	$+$

Cuadro 10: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 10 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$.

2) **Máximos y mínimos:** Observando en cuadro 10 el signo de la derivada, vemos que pasa de decrecer a crecer en $x = 0$ y es del dominio, por lo que tiene ahí un mínimo. La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:

   $\mathbf{x{=}0} \longrightarrow y = \sqrt{0^2+1} = 1 \Longrightarrow (0, 1)$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión. Como $x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0$ deducimos que la función es cóncava. Como no cambia de tipo de concavidad podemos deducir que la función no tiene puntos de inflexión.

d) Para afinar la representación gráfica vamos a hacer una pequeña tabla de valores:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$4'12$	$3'16$	$2'24$	$1'41$	1	$1'41$	$2'24$	$3'16$	$4'12$

RESUMEN

Dominio $\to \mathbb{R}$

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X No corta.

Eje Y $\to (0,1)$

Regiones: Son:

$+ \to \mathbb{R}$

$- \to$ No tiene.

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: No tiene.

A.O.: $\left[\begin{array}{ll} y = x & \text{cuando} x \to +\infty \\ y = -x & \text{cuando} x \to -\infty \end{array}\right.$

Crecimiento $\to (0,+\infty)$

Decrecimiento $\to (-\infty,0)$

Máximos y mínimos: Son:

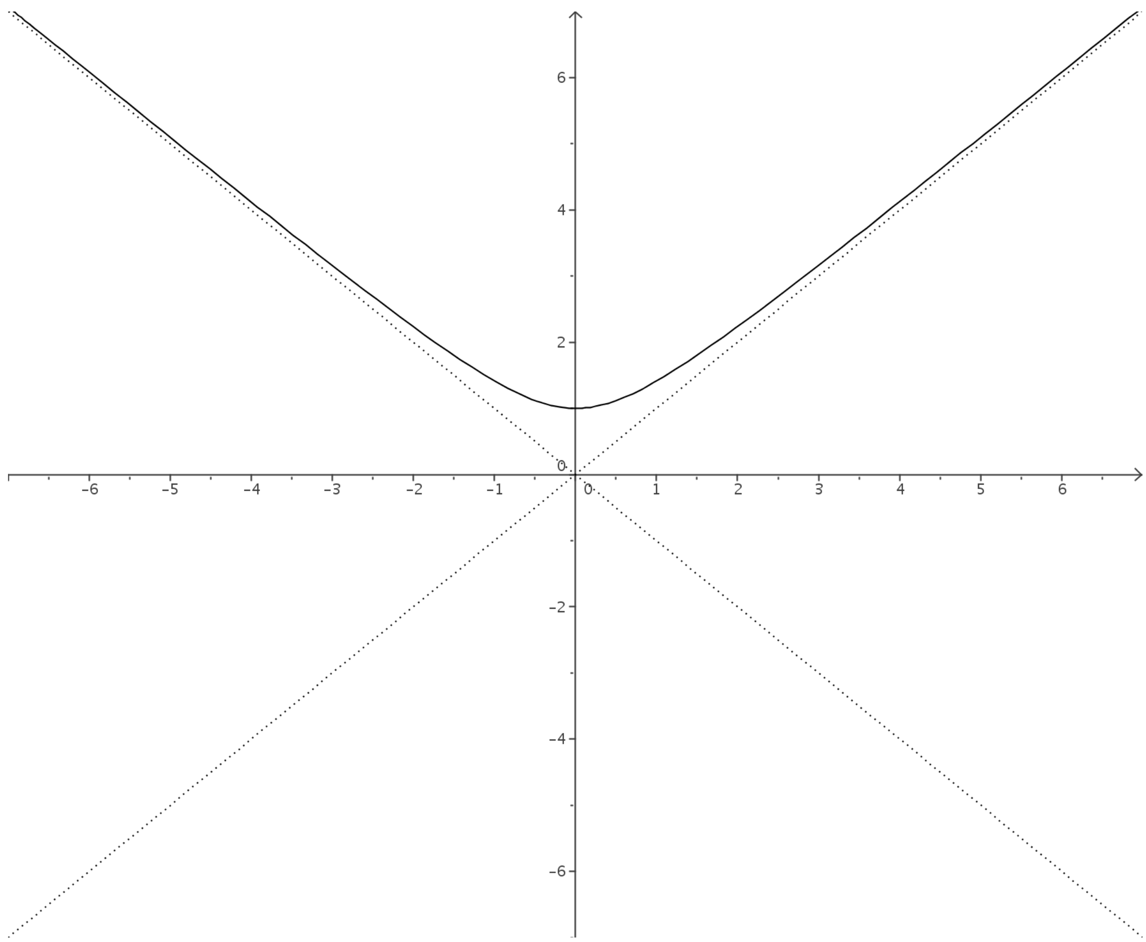
Máximo No tiene.

Mínimo $\to (0,1)$

Cóncava $\to \mathbb{R}$

Convexa No es

P. Inflexión: No tiene.



5. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Como se trata de una raiz, al dominio pertenecerán los puntos que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero.
Veamos donde $x^2 + 2x \geq 0$.
Las raices son:

$$x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \ ; \ x = -2$$

En virtud a lo que observamos en el cuadro 11, y teniendo en cuenta que el radicando

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$x^2 + 2x$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 11: Signo del radicando

tiene que ser mayor o igual que cero, el dominio es $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

2) **Simetría:** No va a ser simétrica, pues no lo es el polinomio. Vamos a demostrarlo:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 2(-x)} = \sqrt{x^2 - 2x}$$

Esta expresión no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por tanto no es simétrica.

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser composición de funciones continuas.

5) **Corte con los ejes:**
Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$\sqrt{x^2 + 2x} = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \ ; \ x = -2$$

Luego corta al Eje X en $(-2, 0)$; $(0, 0)$.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

$$y = \sqrt{0 + 0} = \sqrt{0} = 0$$

Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 0)$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de la raiz positiva, luego la función es positiva en todo su dominio.

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:
  En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.
- A. Horizontales:
  Veamos si las tiene.
  $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$$
  $$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} = +\infty$$
  Luego no tiene.
- A. Oblicuas:
  Como no tiene asíntotas horizontales vamos a buscar las oblicuas.
  $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$
  $n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)} =$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}+x} = 1$
  Por tanto, cuando $x \longrightarrow +\infty$, la recta $y = x+1$ es una asíntota oblícua.
  Es un caso un poco particular, pues si calculamos los límites cuando $x \longrightarrow -\infty$ tenemos:
  $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-x} = -1$
  $n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} + x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} - x\right) =$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x} + x\right)} =$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2}+x} = -1$
  Por tanto, cuando $x \longrightarrow -\infty$, la recta $y = -x-1$ es una asíntota oblícua.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} =$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.

- Raices del numerador:
  $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$

- Raices del denominador:
$\sqrt{x^2+2x} = 0 \Rightarrow x = -2 \ ; \ x = 0$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$	$-$	No existe	$+$

Cuadro 12: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 12 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(0,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty,-2)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 12 vemos que no hay máximos ni mínimos, pues además el único valor que anula la derivada, $x=1$, no es del dominio.

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}}{x^2+2x} = \frac{\dfrac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}}}{x^2+2x} =$$

$$= \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{(x^2+2x)\cdot\sqrt{x^2+2x}} = \frac{-1}{(x^2+2x)\cdot\sqrt{x^2+2x}}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.
De Observar el cuadro 13 deducimos que la función es convexa en su dominio y que no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$\dfrac{-1}{(x^2+2x)\cdot\sqrt{x^2+2x}}$	$-$	No existe	$-$

Cuadro 13: Estudio del signo de la derivada segunda de f

RESUMEN

Dominio $\rightarrow (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

Simetría: No tiene.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow (-2, 0)$; $(0, 0)$.

Eje Y $\rightarrow (0, 0)$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: No tiene.

A.O.: $\left[\begin{array}{ll} y = x + 1 & \text{cuando} x \rightarrow +\infty \\ y = -x - 1 & \text{cuando} x \rightarrow -\infty \end{array} \right.$

Crecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow (-\infty, -2)$

Máximos y mínimos: Son:

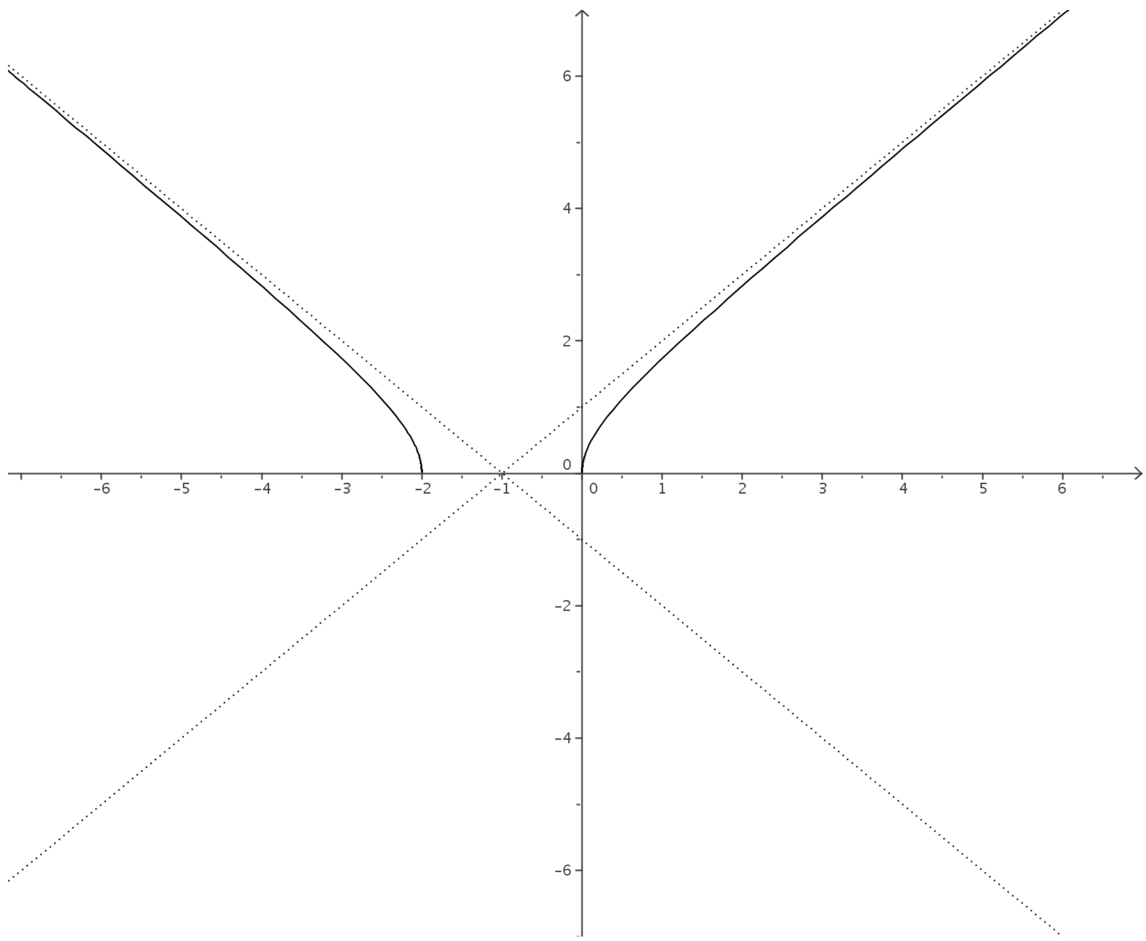
Máximo No tiene.

Mínimo No tiene.

Cóncava No es.

Convexa $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

P. Inflexión: No tiene.



6. $y = e^{-x^2}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Teniendo en cuenta el comportamiento de la función exponencial y que esta no se anula nunca, podemos afirmar que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

$$y = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

2) **Simetría:** Como el polinomio es par, la función va a serlo. Vamos a comprobarlo:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.
4) **Continuidad:** La función es continua por ser composición de funciones continuas.
5) **Corte con los ejes:**

   Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$e^{-x^2} = 0$$

   Esta ecuación no tiene solución, pues la exponencial no se anula nunca. Luego no corta al Eje X.

   Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

$$y = e^{-0} = 1$$

   Luego corta al Eje Y en el punto $(0, 1)$
6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de una exponencial, luego la función es positiva en todo su dominio.
7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:
   - A. Verticales:
     En este caso no hay ningún valor que haga que la función se vaya al infinito (ningún valor real), por tanto no hay asíntotas verticales.
   - A. Horizontales:
     Veamos si las tiene.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-(-x)^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$$

     Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- A. Oblicuas:
  Como tiene asíntotas horizontales no puede tener oblicuas.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.
Veamos donde se anula $-2xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, -2)$	$(0, +\infty)$
$-2xe^{-x^2}$	$+$	$-$

Cuadro 14: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 14 podemos afirmar que la función decrece en el intervalo $(0, +\infty)$ y crece en el intervalo $(-\infty, 0)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 14 vemos que la función pasa de crecer a decrecer en $x = 0$ y como pertenece al dominio hay en él un máximo.
   La segunda coordenada se obtiene **SIEMPRE** sustituyendo en la función:
   x=0 $\longrightarrow y = e^{-}0 = 1$

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver la concavidad y la convexidad. Igualmente estudiaremos en la tabla los puntos de inflexión.
Vamos a hallar los valores en los que se hace cero:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De Observar el cuadro 15 deducimos que la función es cóncava $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y es convexa en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$(4x^2-2)e^{-x^2}$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 15: Estudio del signo de la derivada segunda de f

La función tiene dos puntos de inflexión que están en los puntos con coordenadas $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como siempre sustituimos en la función para hallar la segunda coordenada:

$$\text{x}=\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\text{x}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

RESUMEN

Dominio $\mathbb{R}$

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow$ No corta.

Eje Y $\rightarrow (0, 1)$

Regiones: Son:

$+ \rightarrow \mathbb{R}$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: No tiene.

A.H.: $y = 0$.

A.O.: No tiene.

Crecimiento $\rightarrow (-\infty, 0)$

Decrecimiento $\rightarrow (0, +\infty)$

Máximos y mínimos: Son:

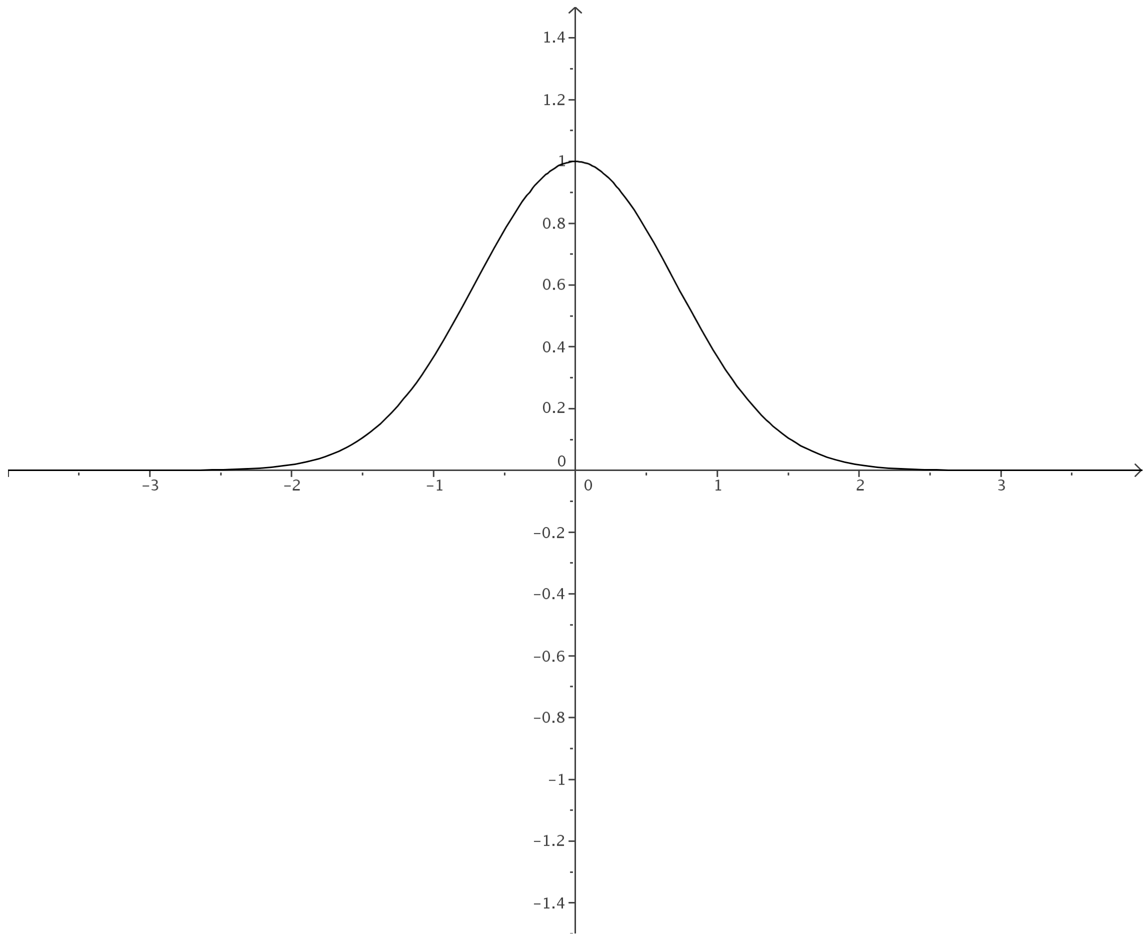
Máximo $(0, 1)$.

Mínimo No tiene.

Cóncava $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Convexa $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

P. Inflexión: $\longrightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$



7. $y = \ln(x^2 - 1)$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Teniendo en cuenta el comportamiento de la función logarítmica, lo de dentro del logaritmo tiene que ser estrictamente positivo. Vamos a ver donde ocurre esto.

$$x^2 - 1 > 0; x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	(-1,1)	$(1, +\infty)$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 16: Estudio del signo de $x^2 - 1$

Luego el dominio de f es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

2) **Simetría:** Como el polinomio es par, la función va a serlo. Vamos a comprobarlo:

$$f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$$

3) **Periodicidad:** No tiene. La periodicidad sólo tiene sentido estudiarla en las funciones trigonométricas.

4) **Continuidad:** La función es continua en su dominio, por ser composición de funciones continuas en su dominio.

5) **Corte con los ejes:**

Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$\ln(x^2 - 1) = 0$$

El logaritmo se anula cuando lo de dentro vale 1. Por tanto:

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 1 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Luego corta al Eje X en los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

No corta al Eje Y, pues $0 \notin \mathrm{Dom}\, f$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Se trata de un logaritmo, luego la función es positiva cuando lo de dentro valga más de uno y negativa cuando valga entre cero y uno. Es conveniente recordar que para estudiar las regiones utilizamos los valores en los que corta al Eje X y los intervalos, en este caso, que no estan en el dominio.

	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},-1)$	$(-1,1)$	$(1,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},+\infty)$
$ln(x^2-1)$	$+$	$-$	No existe	$-$	$+$

Cuadro 17: Estudio de las regiones de la función $\ln(x^2-1)$

7) **Asíntotas:** Vamos a estudiar las asíntotas:

- A. Verticales:

  Como es un logaritmo, puede presentar asíntotas verticales en los puntos que anulan lo de dentro del logaritmo. Vamos pues a ver si tiene asíntota en $x=1$ y $x=-1$. Vamos a empezar por estudiar la recta $x=-1$.

  $$\lim_{x\to -1^-} \ln(x^2-1) = -\infty$$
  $$\lim_{x\to -1^+} \ln(x^2-1) \Longrightarrow \text{No existe. A la derecha de -1 no hay función.}$$

  Luego la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

  Estudiemos ahora la recta $x=1$.

  $$\lim_{x\to 1^-} \ln(x^2-1) \Longrightarrow \text{No existe. A la izquierda de 1 no hay función.}$$
  $$\lim_{x\to 1^+} \ln(x^2-1) = -\infty$$

  Luego la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

- A. Horizontales: Veamos si las tiene.

  $$\lim_{x\to +\infty} \ln(x^2-1) = +\infty$$
  $$\lim_{x\to -\infty} \ln(x^2-1) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x^2-1) = +\infty. \text{ Luego no tiene asíntota horizontal.}$$

- A. Oblicuas:

  Como no tiene asíntotas horizontales puede tener oblicuas. Vamos a estudiar el límite correspondiente.

  $$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0 \end{aligned}$$

  Luego no tiene asíntotas oblícuas, pues m no puede valer 0. Como la función es par ocurrirá lo mismo en $x\to -\infty$.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos.
Veamos donde se anula

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Este punto no podemos usarlo pues el cero no pertenece al dominio. Si tendremos en cuenta el intervalo que no esté en el dominio.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frac{2x}{x^2-1}$	$-$	No hay función	$+$

Cuadro 18: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 18 podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(1, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, -1)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 18 vemos que la función no tiene ni máximos ni mínimos.

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Igualando a cero tenemos:

$$\frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow -2x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow -2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = -1$$

Esta ecuación no tiene solución, luego la función no tendrá puntos de inflexión y para estudiar la curvatura usaremos el intervalo en el que no existe la función. De Observar el cuadro 19 deducimos que la función es cóncava hacia abajo en todo su dominio, es decir, en

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$	$-$	No hay función	$-$

Cuadro 19: Estudio del signo de la segunda derivada de f

RESUMEN

Dominio $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Simetría: Par.

Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: No tiene.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

Eje X $\rightarrow(-\sqrt{2},0)$; $(\sqrt{2},0)$

Eje Y $\rightarrow$ No corta.

Regiones: Son:

$+\rightarrow(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

$-\rightarrow(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

Asíntotas: Las asíntotas son:

A.V.: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

A.H.: No tiene.

A.O.: No tiene.

Crecimiento $\rightarrow(1,+\infty)$

Decrecimiento $\rightarrow(-\infty,-1)$

Máximos y mínimos: Son:

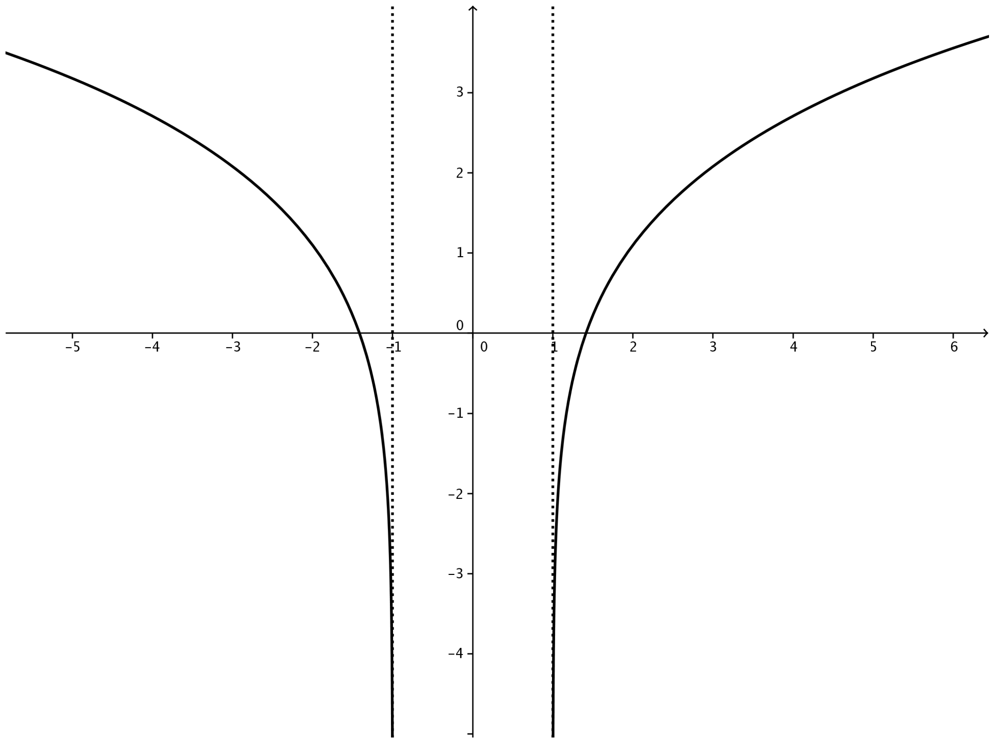
Máximo No tiene.

Mínimo No tiene.

Cóncava $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Convexa No tiene.

P. Inflexión: No tiene.



8. $y = 3\,cos\dfrac{x}{2}$

a) **ESTUDIO DE f:**

1) **Dominio:** Por como es la función coseno tenemos que el dominio es todo $\mathbb{R}$.
2) **Simetría:** La función coseno tiene simetría par ($cos(-\alpha) = cos\alpha$), luego nuestra función es par.
3) **Periodicidad:** Es una función periódica. Para calcular el periodo tenemos que tener en cuenta que el periodo de la función $cos\,x$ (al igual que la del seno) es 2π. En nuestro caso tenemos que:

$$\frac{x}{2} = 2\pi \Longrightarrow x = 4\pi$$

Luego el periodo es 4π. Visto esto **vamos a estudiarla y representarla** en el intervalo $[0, 4\pi]$.

4) **Continuidad:** La función es continua en todo $\mathbb{R}$.
5) **Corte con los ejes:**

Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$3\,cos\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow cos\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \pi \\ \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow x = 3\pi \end{array}\right.$$

Por lo tanto tenemos dos puntos de corte en el intervalo $[0, 4\pi]$, que son $(\pi, 0)$ y $(3\pi, 0)$.

Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.

$$3\,cos0 = 3 \Longrightarrow (0, 3)$$

6) **Regiones:** Vamos a estudiar el signo de la función. Utilizaremos los puntos en los que corta al Eje X.

	$(0, \pi)$	$(\pi, 3\pi)$	$(3\pi, 4\pi)$
$3\,cos\dfrac{x}{2}$	$+$	$-$	$+$

Cuadro 20: Estudio de las regiones de la función $3\,cos\dfrac{x}{2}$

Luego la función es positiva en los intervalos $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$ y es negativa en el intervalo $(\pi, 3\pi)$.

7) **Asíntotas:** La función coseno, como la seno, no tiene asíntotas.

b) **ESTUDIO DE f':**

Vamos a calcular el valor de la derivada:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\,sen\frac{x}{2} \Longrightarrow sen\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ \\ \dfrac{x}{2} = \pi \Longrightarrow x = 2\pi \\ \\ \dfrac{x}{2} = 2\pi \Longrightarrow x = 4\pi \end{array}\right.$$

Vemos que se anula cada 2π. En primer lugar vamos a estudiar su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento. Igualmente estudiaremos en la tabla los máximos y los mínimos. Para ello vamos a empezar a estudiar desde -2π hasta 6π.

	$(-2\pi, 0)$	$(0, 2\pi)$	$(2\pi, 4\pi)$	$(4\pi, 6\pi)$
$-\frac{3}{2}\,sen\frac{x}{2}$	$+$	$-$	$+$	$-$

Cuadro 21: Estudio del signo de la derivada de f

1) **Crecimiento y decrecimiento:** Observando el cuadro 21, y volviendo a nuestro intervalo $[0, 4\pi]$ podemos afirmar que la función crece en el intervalo $(2\pi, 4\pi)$ y decrece en el intervalo $(0, 2\pi)$.
2) **Máximos y mínimos:** Observando el cuadro 21 vemos que la función tiene máximos en los puntos $(0, 3)$ y $(4\pi, 3)$. A su vez tiene un mínimo en $(2\pi, -3)$.

c) **ESTUDIO DE f'':**

Vamos a calcular el valor de la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{3}{4}\,cos\,\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow cos\,\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \pi \\ \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow x = 3\pi \end{array}\right.$$

	$(0, \pi)$	$(\pi, 3\pi)$	$(3\pi, 4\pi)$
$-\frac{3}{4}\,cos\,\frac{x}{2}$	$-$	$+$	$-$

Cuadro 22: Estudio del signo de la segunda derivada de f

De Observar el cuadro 22 deducimos que la función es cóncava hacia abajo en los intervalos $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(\pi, 3\pi)$. Tenemos dos puntos de inflexión en los puntos $(\pi, 0)$ y $(3\pi, 0)$.

RESUMEN

Dominio $\mathbb{R}$

Simetría: Par.
Simétrica respecto del Eje Y.

Periodicidad: Periódica con periodo 4π.

Continuidad: Continua en su dominio.

Corte con los ejes: Corta en:

- **Eje X** $\rightarrow (\pi, 0)$; $(3\pi, 0)$
- **Eje Y** $\rightarrow (0, 3)$

Regiones: Son:

- $+ \rightarrow (0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$
- $- \rightarrow (\pi, 3\pi)$

Asíntotas: Las asíntotas son:

- **A.V.:** No tiene.
- **A.H.:** No tiene.
- **A.O.:** No tiene.

Crecimiento $\rightarrow (2\pi, 4\pi)$

Decrecimiento $\rightarrow (0, 2\pi)$

Máximos y mínimos: Son:

- **Máximo** $(0, 3)$; $(4\pi, 3)$.
- **Mínimo** $(2\pi, -3)$.

Cóncava $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

Convexa $(\pi, 3\pi)$.

P. Inflexión: $(\pi, 0)$; $(3\pi, 0)$.