CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

CURVATURA

En el asunto de la curvatura, los libros de texto no se ponen de acuerdo, por lo que nosotros no vamos a hablar de cóncava y convexa, sino de cóncava hacia arriba (abierta hacia arriba ($\bigcup$)) o cóncava hacia abajo (abierta hacia abajo ($\bigcap$)).

- Si $f''(x) > 0$ la función es ***Convexa***.($\bigcup$)
- Si $f''(x) < 0$ la función es ***Cóncava***. ($\bigcap$)
- **Cálculo:** Ejemplo: $\left(f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1},\ f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2},\ f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}\right)$
  - Calcular los puntos que no están en el dominio.
    $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
  - Calcular los puntos donde la segunda derivada vale cero.
    $f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$
  - Estos puntos dividen la recta real en una serie de intervalos.
  - Estudiar el signo de la derivada en cada uno de estos intervalos.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

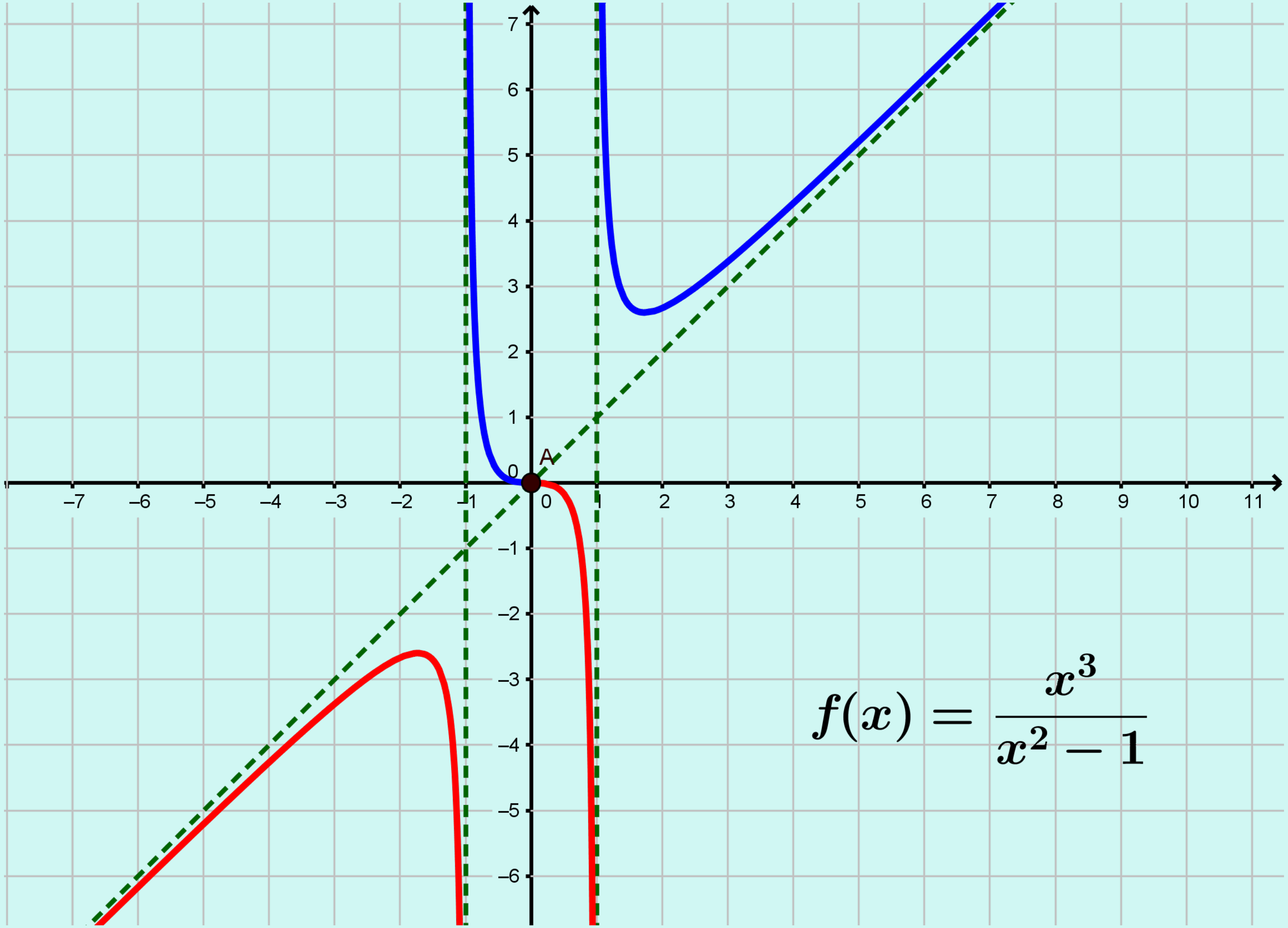
  - **Convexa**($\bigcup$) $\longrightarrow (-1,0) \cup (1,+\infty)$
  - **Cóncava**($\bigcap$) $\longrightarrow (-\infty,-1) \cup (0,1)$

VER GRÁFICA EN LA SIGUIENTE HOJA

PUNTOS DE INFLEXIÓN

- Un **punto de inflexión** es aquel donde la función *cambia su tipo de curvatura.*
- **Cálculo:** Ejemplo: $\left(f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1},\ f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2},\ f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3},\ f'''(x) = \dfrac{-6x^4-36x^2-6}{(x^2-1)^4}\right)$

  - **PRIMER MÉTODO:** *Estudiando la curvatura.*
    - Si en un punto cambia de tipo de curvatura y *es del dominio*, la función tiene un punto de inflexión. (En el ejemplo anterior tiene un punto de inflexión en $x = 0$, pues 1 y -1 no están en el dominio).
  - **SEGUNDO MÉTODO:** *Estudiando la 3ª derivada.*
    - Si $\mathbf{f''(a) = 0}$ y $\mathbf{f'''(a) \neq 0}$ La función tiene un punto de inflexión en $x = a$. En nuestro ejemplo, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = \dfrac{-6}{1} = -6 \neq 0$, luego hay un punto de inflexión en $x = 0$.
    - Si además, como ocurre en nuestro ejemplo, $f'(0) = 0$, tendremos que la función *tiene un punto de inflexión en $x = 0$ con tangente horizontal* (puede verse en la gráfica que la recta tangente en $x = 0$ es la recta $y = 0$)



A
$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$