PREPARAR LA EBAU

(MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II)

Autor: Vicente González Valle

Prólogo

Es un material que abrevia la materia del curso y orienta en la preparación de la EBAU. Como siempre espero que te sea útil, y si se te ocurre alguna idea que falte o veas algún error me lo comuniques por email a vicentegonzalezvalle@educarex.es.

Vamos a mencionar aquí algunas ideas muy importantes para preparar la EBAU. Tenéis además, en el aula virtual del instituto Zurbarán, resueltos por mi compañero Ricardo Trujillo, los ejercicios de la EBAU divididos por partes. Podéis acceder al aula virtual con acceso a invitados. Los ejercicios a los que haré referencia serán de estos archivos.

Al final del documento incluiré los modelos de examen propuestos por la comisión para los cursos 2019-20 y 2020-21 resueltos y explicados.

Además tendrás al final vídeos por bloques temáticos que usé para mis alumnos el curso 2019-20.

Mucho ánimo.

Vicente González Valle

Capítulo 1

Álgebra

El archivo del EBAU que tiene que ver con esta parte se llama SOLUCIONES EXÁMENES SELECTIVIDAD MATRICES Y SISTEMAS EBAU.

1.1. Sistemas de ecuaciones

En este apartado puede ser válido que repases como se resuelve un sistema compatible determinado por el método de GAUSS. Puedes verlo en **este vídeo.**

También puedes ver como resolver un sistema compatible determinado por la regla de Cramer. Puedes verlo en **este vídeo.** En el modelo de examen propuesto para este curso 2020-21 han puesto este ejercicio:

> **2.-** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2. Calcula, justificando la repuesta, los valores de x, y, z para que se verifique $A^t \cdot B = I + C$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

1.2. Matrices y determinantes

En este apartado vamos a destacar varios tipos de ejercicios.

- Potencias de matrices o matrices cíclicas: Esto va destinado a calcular potencias de exponente muy grande de una matriz. Suele salir poco en la EBAU, pero no estaría de más que le echaras un ojo a **este vídeo**.

Puedes ver algunos ejercicios como el 28, 29 y 35 b) del archivo de la EBAU.

- Inversa de una matriz: Es importante que recuerdes que **una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de 0**. A esas matrices les llamamos regulares. Para ver como calcular la inversa de una matriz y como ver el valor de un parámetro para el que tiene inversa puedes ver estos dos vídeos:

- **Inversa de una matriz.**
- **Inversa de una matriz en función de un parámetro.**

Puedes aplicar esto en los ejercicios de la EBAU 7, 35 a), 37 a) y b), 38 a), 40 b), 11, 24 y 42 a).

- Ecuaciones: Este suele ser un tema de los que más aparece en la EBAU. Vamos a ver dos tipos, aunque especialmente se tratan en la EBAU aquellas en las que hay que despejar la matriz X. **Hay que tener en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo,** es decir, si tenemos $A \cdot X = B$ para "quitar" la A tenemos que multiplicar por la izquierda, es decir, $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Si tenemos $X \cdot A = B$, entonces habría que multiplicar por la derecha, es decir, $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. A continuación puedes ver dos vídeos que ilustran dos tipos de ecuaciones, aunque el más probable que te pongan sea el primero.

- **Ecuaciones con matrices - Para despejar X.**
- **Ecuaciones con matrices - Matrices que conmutan.**

Del primer tipo en la EBAU han salido los ejercicios 5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 21, 23, 25, 31, 33, 34, 39, entre otros. Del segundo tipo solo el 4.

En el modelo de examen propuesto para este curso 2020-21 han puesto estos dos ejercicios:

1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de ecuación matricial $A \cdot X + X = B$. Justifica la respuesta.

3.- Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$$

a) Determinar, justificando la respuesta, para qué valor del parámetro x no existe A^{-1}.

b) Hallar la inversa de la matriz A para $x = 0$. Justificar la respuesta.

Capítulo 2

Programación lineal

Este tema es propio de esta asignatura, de hecho los alumnos de ciencias no lo dan. Se trata de problemas en los que se tienen que resolver inecuaciones lineales con dos incógnitas y encontrar lo que llamamos la región factible. Creo que es mejor que veas estos dos vídeos que pueden ilustrarte de que va esto.

a) **Ejercicio práctico de programación lineal.**

b) **Problema de programación lineal (región acotada).**

c) **Problema de programación lineal (región no acotada).**

Ya sabemos que $x \geqslant 0$ es lo habitual en los problemas y lo que hace, junto con $y \geqslant 0$, es restringir la región factible al primer cuadrante. Pero quiero hacer especial hincapié en las rectas horizontales y verticales que aparecen en el problema. Las restricciones del tipo $0 \leqslant x \leqslant 11$, conlleva una recta vertical que es la $x = 11$ que hay que tener en cuenta. De la misma forma la restricción $0 \leqslant y \leqslant 8$, conlleva una recta horizontal $y = 8$ que hay que tener en cuenta. Fíjate en esto al ver el vídeo, pues en la reunión de coordinación que se celebró en Mérida nos dijeron que os lo recalcáramos.

Los ejercicios de esta parte están en el archivo de la EBAU SOLUCIONES EXÁMENES PROGRAMACIÓN LINEAL EBAU MCS II.

De este apartado tenéis un problema en el modelo del curso 2020-21. Aquí os lo dejo.

4.- Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, ¿cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Capítulo 3

Análisis

3.1. Límites, continuidad y asíntotas.

El fichero de la EBAU que usaremos en este capítulo es SOLUCIONES EXÁMENES OPTIMIZACIÓN EBAU.

Límites: Empecemos por ver esta parte. Es muy necesaria para las asíntotas, pero no es normal que te lo pidan como un ejercicio propiamente dicho. Como siempre, vamos a ver unos vídeos.

- **Límites en el ∞.**
- **Límites de la forma $\frac{0}{0}$.**
- **Límites de la forma $\frac{a}{0}$.**

De esto seguro que encuentras muchos en tu libro. Busca que sean de estos tipos. En el aula virtual del instituto tenéis el solucionario del libro para que los comprobéis. Están en el tema 6. Haz solo los de polinomios o cociente de polinomios. No te compliques con otra cosa.

Continuidad: Aquí se centra fundamentalmente en problemas con funciones definidas a trozos en los que hay que calcular unos parámetros (A, B, ...). En estos ejercicios se mezclan varias de las cosas que se tratan en este apartado, pero te pongo unas ideas para tratar de encaminar estos ejercicios, aunque lo suyo es que veas **este vídeo.**

- Lo primero que nos tenemos que preguntar es cuántos parámetros tenemos que calcular. Si tenemos que calcular dos parámetros, que será lo más normal, tendremos que plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. A continuación te pongo de donde pueden salir.

- Te pueden decir que la función en un punto concreto vale un determinado valor, por ejemplo, la función en el instante 7 vale 48. En este caso una ecuación saldrá de hacer $F(7) = 48$.

- Otra opción es que te digan que la función es continua en un punto. Eso quiere decir que los límites laterales en ese punto coinciden (**puedes ver el ejercicio 8 que han planteado en el modelo de este curso 2019-20 y que tienes al final de este documento**). Contempla las dos ideas expresadas anteriormente.

- La otra opción es que tenga un máximo o un mínimo en algún punto, lo cual se traduce en que la derivada en ese punto vale cero. Por ejemplo, tiene un máximo (daría lo mismo mínimo) en $x = 5$. En ese caso la ecuación que estamos buscando para el sistema sale de hacer $F'(5) = 0$.

Algunos ejercicios se mezclan con lo de la derivadas y sus aplicaciones, pero aquí te recomiendo hacer los ejercicios de la EBAU cuyo número es 36, 41, 50, 54, 68, 71, 76 a) y b) y 79.

Asíntotas: En la EBAU venían antes metidos en enunciados de problemas, pero ahora se ha decidido que tendrán que ir solos y sin estar en ningún problema, como ocurre en el ejercicio 4 apartado b). Te recomiendo, como siempre, ver **este vídeo.**

De todas formas voy a comentarte algunas ideas importantes a tener en cuenta:

- Las asíntotas son rectas, luego **no hay una asíntota en el 3**. Las asíntotas verticales tienen ecuación $x = a$, las horizontales $y = b$ y las oblicuas $y = mx + n$.

- Las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles. Si tiene una no tiene la otra.

- Las asíntotas verticales salen de los valores que anulan el denominador. Para ello, si $x = 1$, por ejemplo, anula el denominador hay que hacer el

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$$

  Si el resultado es una expresión de la forma $\frac{a}{0}$ entonces habrá asíntota vertical, pues los límites laterales se irán al infinito.

- En los cocientes de polinomios, que es lo que nos van a poner pueden ocurrir cuatro cosas. Dependiendo de que ocurra tendremos algún tipo de asíntota o no. Veamos cuales son estas posibilidades (**solo sirve para saber de antemano que nos va a pasar. Siempre habrá que hacer el límite o dividir como dice en el vídeo**):

  - El grado del numerador es más pequeño que el del denominador. Hay una asíntota horizontal en la recta $y = 0$, pues, por ejemplo,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x^2-4} = 0$$

  - Si los dos grados son iguales también hay asíntota horizontal, pues por ejemplo,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{x^2-4} = 3$$

y por tanto tendrá asíntota horizontal en la recta $y = 3$.

- Si el grado del numerador es **uno** mayor que el del denominador, habrá asíntota oblicua y habrá que dividir como hacemos en el vídeo.
- Si el grado del numerador es más de una unidad mayor que el del denominador no hay ninguna de los dos dos tipos de asíntotas.

3.2. Derivada y aplicaciones.

En este bloque nos vamos a fijar principalmente en el cálculo de máximos (**os recuerdo que son absolutos, luego habrá que ver que vale la función en los extremos del intervalo**) y en representar las funciones. Para pintarlas, normalmente, nos va a servir con poner los máximos y mínimos relativos (**recuerda que la segunda coordenada se calcula SIEMPRE sustituyendo en la función y no en la derivada**) y calculando, igualmente, el valor de la función en los extremos del intervalo. Con eso nos vale. Puedes ver la resolución del ejercicio 3 del modelo del curso 2019-20 que tienes al final del documento.

Puedes ver, para orientarte, el **siguiente vídeo.**

Del fichero de la EBAU puedes hacer los siguientes ejercicios: 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 72, 73 a) y b), 74, 75, 77, 78 a) y b), 80 a) y b).

3.3. Cálculo integral.

Este es un tema nuevo en la EBAU. De hecho ha empezado a salir hace dos o tres años. En la última reunión de la coordinación se dijo que se se pondría un ejercicio de área encerrada por un polinomio con el eje X, en un intervalo en el que a lo sumo habría un punto de corte.

Esa es la palabra clave, **punto de corte. Siempre hay que ver los puntos de corte de la función que nos dan con el eje X, es decir, ver donde la función que nos dan vale 0.** En nuestro caso se tratará de un polinomio de grado dos o, normalmente, de grado tres. Si es de grado dos es bien sencillo encontrar el punto de corte. Si es de grado tres habrá que buscar una raíz por Ruffini y luego resolver la ecuación de segundo grado que nos queda. El ejercicio 4 aparatado a) del modelo de examen del curso 2019-20 nos dice como actuar.

Solo habrá que tener en cuenta los puntos de corte que estén dentro del intervalo que nos dan. Si no hay ninguno haremos directamente la integral entre los extremos del intervalo, como ocurre en el modelo de este año.

De todas formas es bueno que veas el **siguiente vídeo** que te explica este tema.

También nos pueden pedir el área encerrada por una función y el eje X, en cuyo caso, los límites de integración, serían los puntos de corte de la función con el eje X. Puedes ver este caso en el **siguiente vídeo**.

De este capítulo de análisis en el modelo de examen puedes ver los siguientes ejercicios:

5.- El precio de cada acción de una determinada empresa, x, oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

Se sabe que para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

6.- Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leqslant t \leqslant 6)$$

Determinar, justificando las respuestas, las horas de máximo y mínimo caudal. Calcular los caudales máximo y mínimo.

7.- Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

Capítulo 4

Probabilidad

La parte más engorrosa sería el álgebra de sucesos, pero si somos prácticos deberíamos recurrir a las tablas de contingencia, pues los ejercicios que nos suelen poner en la EBAU pueden resolverse por ahí. Para entender los casos que se nos podrían producir en las tablas de contingencia podemos ver **este vídeo.**

En estos casos tendríamos que tener presente la fórmula de la probabilidad de la unión

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

También tener presente que si nos piden la probabilidad de que solo ocurra una de las posibilidades, es decir, $P(\text{solo A}) = P(A - B)$, eso es lo mismo que hacer $P(A \cap \overline{B})$ que nos sale directamente de la tabla de contingencia. También hay que tener presente que si dos sucesos son independientes

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

El otro ejercicio tipo de probabilidad es un diagrama de árbol. Para entenderlo puedes ver **este vídeo.**

De esta parte puedes ver por separado las dos cosas posibles a ocurrir en un problema de este tipo. Estas cosas serían:

- **Reglas del producto y la suma.**

- **Teorema de Bayes.**

Este último vídeo habla de una probabilidad condicionada a la inversa, es decir, lo segundo condiciona lo primero. Si hubiera sido directa, es decir, lo primero condicionara lo segundo, **se referirían sólo al valor que va en esa rama.**

De este apartado tienes muchos ejercicios en el archivo de problemas de la EBAU que se llama SOLUCIONES EXÁMENES PROBABILIDAD EBAU.

De esta parte, el modelo de este curso 2019-20 solo aporta un ejercicio:

8.- En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino.

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

Capítulo 5

Estadística

Este apartado tiene dos bloques a tener en cuenta. Uno es la elección de la muestra, que normalmente lo haremos por afijación proporcional, y otro todo lo que tiene que ver con los intervalos de confianza.

Empecemos por la elección de la muestra. Para entenderlo, aunque es muy fácil, puedes ver **este vídeo.**

Esto suele venir mezclado con las estimaciones de la media y principalmente de la proporción, así como con el cálculo de algo relacionado con los intervalos de confianza.

Vayamos a ver lo que tiene que ver con los intervalos de confianza. Ahí distinguimos varios asuntos a tener en cuenta.

- Intervalos de confianza para la media: Todos los ejercicios que nos den cumplirán los requisitos que tenemos que tener en cuenta para poder aplicar la fórmula, es decir, se comportará como una distribución normal. En es caso el intervalo para un determinado nivel de confianza se calcula con la siguiente fórmula: El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor que en la distribución **N(0,1)** deja a su derecha un área de $\alpha/2$ y es la media en la muestra, s la cuasidesviación típica (raíz cuadrada de la cuasivarianza) o la desviación típica (a la que llamaríamos σ y que últimamente es la que te dan) y n el tamaño de la muestra.

Es fácil observar que es un intervalo que tiene en el centro a la media, pues se le suma y se le resta la misma cantidad $z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.

Aquí tienes **un vídeo** en el que se te muestra como calcular, si te dan todos los datos, el intervalo de confianza.

- Intervalos de confianza para la proporción: Aquí podríamos distinguir dos casos, pero normalmente se cumplirán las condiciones (mas de 100 elementos en la muestra) para que la fórmula que tengamos que aplicar sea:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor que en la distribución **N(0,1)** deja a su derecha un área de $\alpha/2$, n el tamaño de la muestra y $\hat{p}$, la proporción de elementos en la población pertenecientes a una categoría C, se calcularía

$$\hat{p} = \frac{\text{Número de elementos de la muestra que pertenecen a C}}{\text{Tamaño de la muestra}}$$

Es fácil observar que es un intervalo que tiene en el centro a la proporción, pues se le suma y se le resta la misma cantidad $z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$.

Es obvio observar que el error que el tamaño del intervalo es el doble de lo que sumamos o restamos, por tanto:

- Para la media, el tamaño sería $T = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.
- Para la proporción, el tamaño sería $T = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$.

Solo destacar que un ejercicio típico es averiguar el tamaño de la muestra para que el error sea menor que un determinado valor.

Para cerrar esto te recomiendo que veas estos dos vídeos.

- **Estimación de la proporción y tamaño de la muestra.**
- **Estimación de la media y tamaño de la muestra.**

Aquí tienes muchos ejercicios para practicar en el archivo de la EBAU SOLUCIONES EXÁMENES ESTADÍSTICA EBAU.

De esta parte el modelo de examen del curso 2019-20 tiene dos problemas que son:

9.- Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular una estimación puntual de la proporción de empresas de esa ciudad que reciclan su papel.

b) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que recicla.

10.- Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

SOLUCIONES MODELO EBAU MATEMÁTICAS APLICADAS CCSS CURSO 2020-21

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de ecuación matricial $A \cdot X + X = B$. Justifica la respuesta.
Solución: Vamos a despejar la matriz X:

$$A \cdot X + X = B \Longrightarrow (A+I) \cdot X = B \Longrightarrow X = (A+I)^{-1} \cdot B$$

Empecemos por calcular $A + I$.

$$A + I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa. Empecemos por calcular el determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$$

Calculemos la inversa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de la matriz $A + I$ sería.

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora X.

$$X = (A+I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2. Calcula, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que $A^t \cdot B = I + C$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.
Solución: Calculemos la traspuesta de A.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculemos ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} A^t \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & x \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3x & 2y+4x \\ 15 & -3y+16 \end{pmatrix} \\ I + C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & 8 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igualando ambas matrices tendríamos

$$\left.\begin{aligned} -2+3x &= z+1 \\ 2y+4x &= 8 \\ 15 &= 15 \\ -3y+16 &= 10 \end{aligned}\right]$$

El sistema resultante sería

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & - & z & = & 3 \\ 4x & + & 2y & & & = & 8 \\ & - & 3y & & & = & -6 \end{array}\right]$$

El sistema habría que resolverlo por Gauss o Cramer, pero como puede verse es muy fácil obtener y en la última ecuación, por tanto:

$$-3y = -6 \Longrightarrow y = 2$$

El sistema que nos queda al sustituir y sería

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & - & z & = & 3 \\ 4x & + & 4 & = & 8 \end{array}\right]$$

En la segunda ecuación podemos calcular x que resultaría

$$4x + 4 = 8 \Longrightarrow 4x = 4 \Longrightarrow x = 1$$

Sustituyendo en la primera tendríamos

$$3 - z = 3 \Longrightarrow z = 0$$

Luego los valores que nos piden son $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$.

3. Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$$

a) Determinar, justificando la respuesta, para qué valor del parámetro x no existe A^{-1}.

b) Hallar la inversa de la matriz A para $x = 0$. Justificar la respuesta.

Solución:

a) Para que no tenga inversa, el determinante de la matriz tiene que valer 0. Vamos a calcular el valor del determinante y lo vamos a igualar a cero para ver el valor de x en el que se anula y por lo tanto no tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{vmatrix} = -4x + 2 - 2x - 8 = -6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

Luego si $x = -1$ la matriz no tiene inversa.

b) Vamos a hacer la inversa para $x = 0$. la matriz sería

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular paso a paso la inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -12 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -12 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, ¿cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Solución: Este es un ejercicio de programación lineal. Vamos a comenzar por definir las variables:

- $x \Longrightarrow$ Nº de trajes de señora.

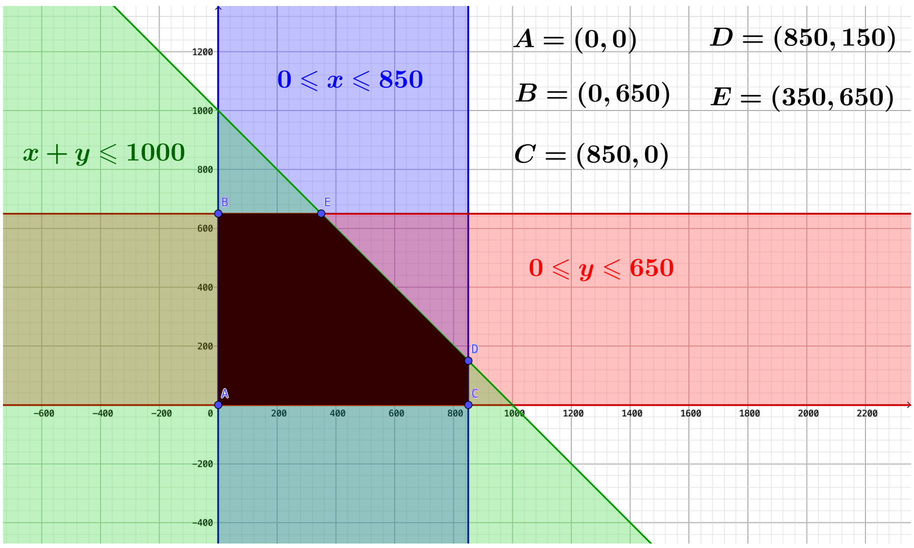
- $y \Longrightarrow$ Nº de trajes de caballero.

Vamos a construir la tabla que recopila todos los datos.

	Trajes de señora	Trajes de caballero	Restricciones
Nº de trajes	x	y	$0 \leqslant x \leqslant 850$; $0 \leqslant y \leqslant 650$
Trajes hechos cada día	x	y	$x + y \leqslant 1000$
Beneficio	$150 \cdot x$	$200 \cdot y$	$B(x, y) = 150 \cdot x + 200 \cdot y$

A continuación vamos a representar las rectas que nos salen y vemos las zonas que se producen. Es **muy importante** tener en cuenta las restricciones primeras. Son rectas horizontales y verticales. tenemos que tener también presente el hecho de que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

Vista la tabla ha que pintar las región $0 \leqslant x \leqslant 850$, la región $0 \leqslant y \leqslant 650$ y la región $x + y \leqslant 1000$. De ahí saldrá, en nuestro caso pintada en negro, la región factible. Puedes verla en la siguiente imagen.



Vamos a calcular los puntos de corte. Son fáciles de ver los tres primeros puntos, pues son el origen y los cortes de las rectas $y = 650$ y $x = 850$ con los ejes cartesianos, es decir, los puntos A, B y C.

- $\left.\begin{array}{l} x = 850 \\ x + y = 1000 \end{array}\right] \Longrightarrow y = 150 \Longrightarrow D = (850, 150)$
- $\left.\begin{array}{l} y = 650 \\ x + y = 1000 \end{array}\right] \Longrightarrow x = 350 \Longrightarrow E = (350, 650)$

Sustituimos los cinco puntos en la función beneficio para ver cual es el mayor de ellos.

- $B(0, 0) = 0$ €.
- $B(0, 650) = 200 \cdot 650 = 130000$ €.

- $B(850, 0) = 150 \cdot 850 = 127500$ €.
- $B(850, 150) = 150 \cdot 850 + 200 \cdot 150 = 157500$ €.
- $B(350, 650) = 150 \cdot 350 + 200 \cdot 650 = 182500$ €.

Por lo tanto, para maximizar los beneficios tendremos que hacer 350 trajes de señora y 650 trajes de caballero, consiguiendo un beneficio máximo de 182500 €

5. El precio de cada acción de una determinada empresa, x, oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

Se sabe que para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.
Solución: Tenemos que calcular los valores de A y B, luego habrá que plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para poder calcular dichos valores. Nos dicen que la función en el uno vale cuatro y que es continua. Eso se plasma en lo siguiente:

- $F(1) = 4 \Longrightarrow A + B = 4 \qquad (1)$
- Continuidad

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (Ax + B) = A + 2B \\ \lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2 - Bx + Ax^2) = 2 - 2B + 4A \end{array}\right] \Longrightarrow A + 2B = 2 - 2B + 4A \ (2)$$

Preparando el sistema y resolviendo obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ A + B = 4 \\ (2)\ 3A - 4B = -2 \end{array}\right] \Longrightarrow A = 2 \ ; \ \ B = 2$$

6. Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 6)$$

Determinar, justificando las respuestas, las horas de máximo y mínimo caudal. Calcular los caudales máximo y mínimo.
Solución: Es un problema en el que nos piden calcular el máximo y el mínimo caudal en esas horas. Vamos a empezar por calcular los máximos y mínimos relativos. Para ello vamos a hacer la derivada, vamos a igualar a cero y resolvemos la ecuación de segundo

grado resultante.

$$C'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 5 \end{array} \right.$$

Como no nos piden el decrecimiento ni el crecimiento, para ver si son máximos y mínimos relativos podemos usar la segunda derivada.

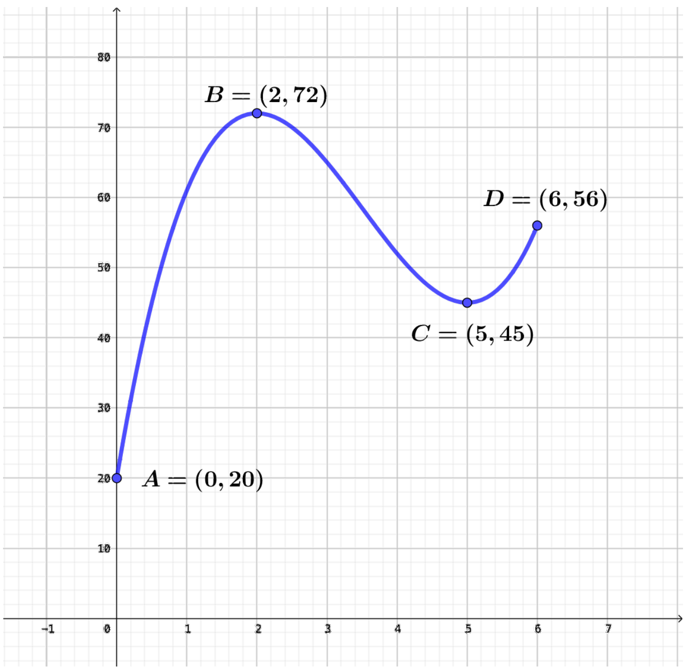
$$C''(t) = 12t - 42$$

- $C''(2) = 24 - 42 = -18 < 0 \longrightarrow$ Máximo relativo en $t = 2$.
- $C''(5) = 60 - 42 = 18 > 0 \longrightarrow$ Mínimo relativo en $t = 5$.

Pero hay que tener cuidado, pues nos piden los máximos y mínimos absolutos. Por tanto, vamos a ver cuanto vale **la función** en estos dos puntos y en los extremos.

- $C(0) = 20$.
- $C(2) = 72$.
- $C(5) = 45$.
- $C(6) = 56$.

Luego el máximo se encuentra en $t = 2$ con un caudal de 72 m^3/s y el mínimo en $t = 0$ con un caudal de 20 m^3/s.
Aunque no es necesario pintarla, para ver más claro lo que hemos hecho, os pongo aquí la gráfica de la función.



7. Se pide, justificando las respuestas:

   a) Hallar el área encerrada por la función: $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$

Solución:

a) Se trata de calcular un área en un intervalo, por lo que habrá que calcular primero los puntos de corte.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

Luego la única raíz dentro del intervalo es $x = 1$.
Por tanto salen dos trozos, el que va del 0 al 1 (A_1) y el que va del 1 al 2 (A_2). Calculemos la integral indefinida:

$$\int \left(x^2 + x - 2\right)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + k$$

Calculemos el valor de cada uno de los trozos.

- A_1

$$\int_0^1 \left(x^2 + x - 2\right)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - 0 = -\frac{7}{6}$$

Luego el área buscada es $A_1 = \dfrac{7}{6}$

- A_2

$$\int_1^2 \left(x^2 + x - 2\right)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{8}{3} + 2 - 4 - \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{7}{6} = \frac{11}{6}$$

Luego el área buscada es $A_2 = \dfrac{11}{6}$

Luego el área buscada es

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3\,\mathrm{u}^2$$

b) Vamos a calcular las asíntotas. Para orientarnos sobre que podemos encontrarnos miramos la función. Puede que haya asíntotas verticales en los valores que anulan el denominador. A su vez, por tener el mismo grado el numerador y el denominador ya se que voy a tener una asíntota horizontal y por tanto no tendré asíntota oblicua. Empecemos por las verticales. Los valores que anulan el denominador son:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

Veamos si esas rectas son asíntotas verticales.

- $x = -1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = -\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = -1$ es asíntota vertical. Bastaba con haber sustituido y ver que daba $\left[\frac{3}{0}\right]$, pues eso garantiza que los límites laterales se van al ∞ y por tanto hay asíntota vertical.

- $x = 4$

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{33}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = 4$ es asíntota vertical.

Veamos la horizontal. Para ello vamos a calcular el límite cuando $x \longrightarrow +\infty$. En las funciones racionales, si este límite es un número, el limite cuando $x \longrightarrow -\infty$ va a dar el mismo número.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \frac{2}{1} = 2$$

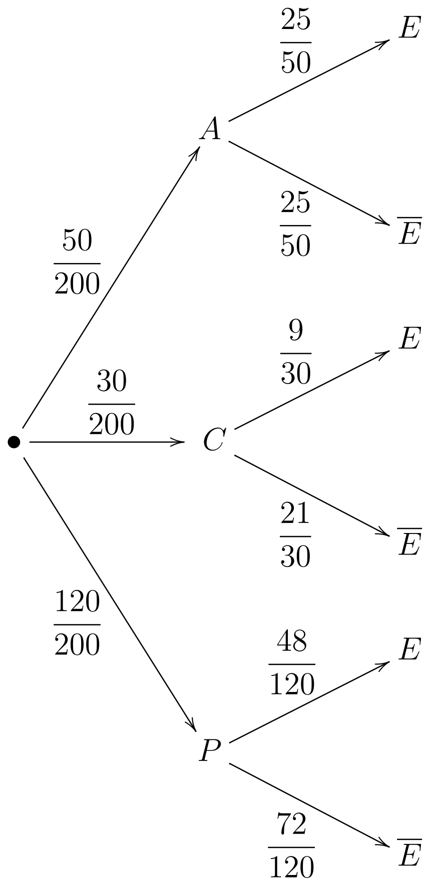
Luego la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de nuestra función. Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua por ser incompatibles.

8. En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

   a) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino.

   b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

Solución: Hay un total de 200 árboles. El diagrama de árbol quedaría



Vamos a contestar a lo que nos preguntan.

a) Vamos a verlo de dos formas para que elijáis la que os resulte más sencilla.
La primera forma consiste simplemente en aplicar la regla de Laplace, es decir, considerar que los casos posibles son todos los pinos (120) y los favorables son los enfermos (48). En este caso la probabilidad sale:

$$P(\text{pino que está enfermo}) = \frac{48}{120}$$

Otra manera de hacerlo, desde mi punto de vista más sencillo, es darnos cuenta de que es una probabilidad condicionada directa, es decir, lo primero condiciona a lo segundo. El enunciado afirma que es un pino y nos pregunta que si está enfermo. Luego el ser pino condiciona lo segundo, estar enfermo. En este caso se trata del valor que va en la rama que va de pino a enfermo, y que no es otro que el calculado anteriormente.

b)

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(C \cap E) + P(P \cap E) = \\ &= \frac{50}{200} \cdot \frac{25}{50} + \frac{30}{200} \cdot \frac{9}{30} + \frac{120}{200} \cdot \frac{48}{120} = \frac{82}{200} = 0,41 \Longrightarrow 41\,\% \end{aligned}$$

9. Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

    a) Calcular una estimación puntual de la proporción de empresas de esa ciudad que reciclan su papel.

    b) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que recicla.

    Solución: Se trata obviamente de una variable cualitativa, por tanto trabajaremos con la proporción.
    Tenemos una muestra de 400 empresas y lo primero que nos piden es hacer una estimación puntual de la proporción:
    $$\hat{p} = \frac{336}{400} = 0,84$$
    Vamos ahora a calcular el intervalo que nos piden en el segundo apartado. Usaremos la fórmula para la proporción:
    $$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$$
    Como el nivel de confianza es del 95 % tendremos que $z_{\alpha/2} = 1,96$. Luego
    $$\begin{aligned}\left(0,84 - 1,96\sqrt{\frac{0,84\cdot 0,16}{400}}, 0,84 - 1,96\sqrt{\frac{0,84\cdot 0,16}{400}},\right) &= (0,84 - 0,036, 0,84 + 0,036) = \\ &= (0,804, 0,876)\end{aligned}$$
    Luego el intervalo pedido es $(0,804, 0,876)$

10. Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.
    Solución: El enunciado es un poco engañoso, pues hablan de que se desea conocer la media, pero no la necesitamos para nada. Nos piden el tamaño de la muestra, es decir, el valor de n.
    Tenemos los siguientes datos:
    $$\sigma = 400 \qquad \text{Nivel de confianza } 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$
    Dado que la fórmula del intervalo de confianza es
    $$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

deducimos que el tamaño del intervalo es

$$T = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Queremos averiguar cuanto tiene que valer n para que el tamaño del intervalo sea de 160.

$$2 \cdot 1,96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} = 160 \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 400}{160} = 9,8 \Longrightarrow n = 9,8^2 = 96,04$$

Luego tendríamos que tomar una muestra de 97 elementos para garantizar que no excede de 160.

SOLUCIONES MODELO EBAU MATEMÁTICAS APLICADAS CCSS CURSO 2019-20

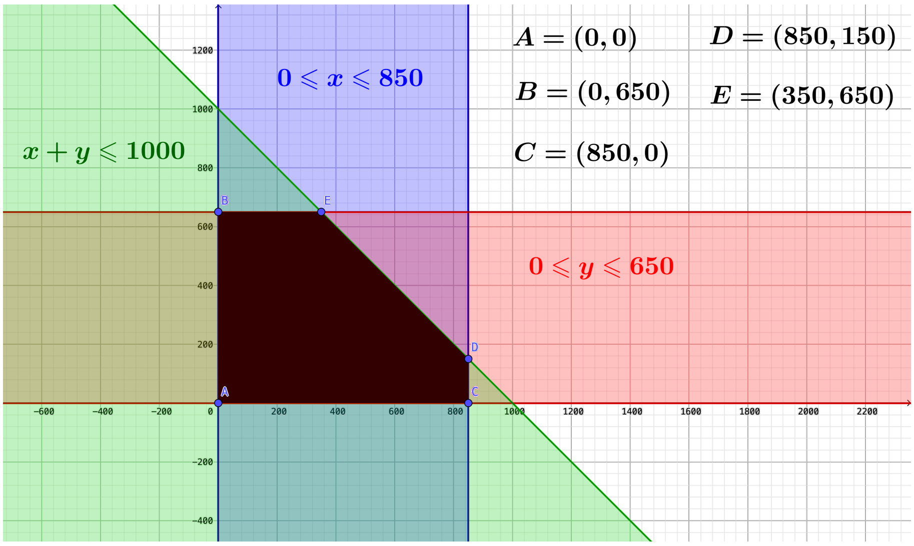
1. Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero, ¿cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.
   Solución: Este es un ejercicio de programación lineal. Vamos a comenzar por definir las variables:

   - $x \Longrightarrow$ Nº de trajes de señora.
   - $y \Longrightarrow$ Nº de trajes de caballero.

   Vamos a construir la tabla que recopila todos los datos.

	Trajes de señora	Trajes de caballero	Restricciones
Nº de trajes	x	y	$0 \leqslant x \leqslant 850$; $0 \leqslant y \leqslant 650$
Trajes hechos cada día	x	y	$x + y \leqslant 1000$
Beneficio	$150 \cdot x$	$200 \cdot y$	$B(x, y) = 150 \cdot x + 200 \cdot y$

   A continuación vamos a representar las rectas que nos salen y vemos las zonas que se producen. Es **muy importante** tener en cuenta las restricciones primeras. Son rectas horizontales y verticales. tenemos que tener también presente el hecho de que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
   Vista la tabla ha que pintar las región $0 \leqslant x \leqslant 850$, la región $0 \leqslant y \leqslant 650$ y la región $x + y \leqslant 1000$. De ahí saldrá, en nuestro caso pintada en negro, la región factible. Puedes verla en la siguiente imagen.



Vamos a calcular los puntos de corte. Son fáciles de ver los tres primeros puntos, pues son el origen y los cortes de las rectas $y = 650$ y $x = 850$ con los ejes cartesianos, es decir, los puntos A, B y C.

- $\left.\begin{array}{l} x = 850 \\ x + y = 1000 \end{array}\right] \Longrightarrow y = 150 \Longrightarrow D = (850, 150)$
- $\left.\begin{array}{l} y = 650 \\ x + y = 1000 \end{array}\right] \Longrightarrow x = 350 \Longrightarrow E = (350, 650)$

Sustituimos los cinco puntos en la función beneficio para ver cual es el mayor de ellos.

- $B(0, 0) = 0$ €.
- $B(0, 650) = 200 \cdot 650 = 130000$ €.
- $B(850, 0) = 150 \cdot 850 = 127500$ €.
- $B(850, 150) = 150 \cdot 850 + 200 \cdot 150 = 157500$ €.
- $B(350, 650) = 150 \cdot 350 + 200 \cdot 650 = 182500$ €.

Por lo tanto, para maximizar los beneficios tendremos que hacer 350 trajes de señora y 650 trajes de caballero, consiguiendo un beneficio máximo de 182500 €

2. Sean A y B la matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de ecuación matricial:

$$A \cdot X - B = A \cdot B$$

Solución: Vamos a comenzar despejando X y luego haremos las operaciones que sean necesarias.

$$\begin{aligned} & A \cdot X - B = A \cdot B \Longrightarrow A \cdot X = A \cdot B + B \\ \Longrightarrow\ & A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) \\ \Longrightarrow\ & X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) \qquad (5.1) \end{aligned}$$

Esto podemos hacerlo así siempre que A tenga inversa, pero, en nuestro caso, A tiene inversa, pues $|A| = 2 + 1 = 3 \neq 0$.
Tenemos que calcular A^{-1}, $A \cdot B$, $A \cdot B + B$ y $A^{-1} \cdot (A \cdot B + B)$. Empecemos por la inversa de la matriz A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de la matriz A sería.

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Hagamos $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sigamos con $A \cdot B + B$.

$$A \cdot B + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Y para finalizar tendríamos que:

$$X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

3. Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leqslant t \leqslant 6)$$

Determinar, justificando las respuestas, las horas de máximo y mínimo caudal. Calcular los caudales máximo y mínimo.
Solución: Es un problema en el que nos piden calcular el máximo y el mínimo caudal en esas horas. Vamos a empezar por calcular los máximos y mínimos relativos. Para ello vamos a hacer la derivada, vamos a igualar a cero y resolvemos la ecuación de segundo

grado resultante.

$$C'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 5 \end{array} \right.$$

Como no nos piden el decrecimiento ni el crecimiento, para ver si son máximos y mínimos relativos podemos usar la segunda derivada.

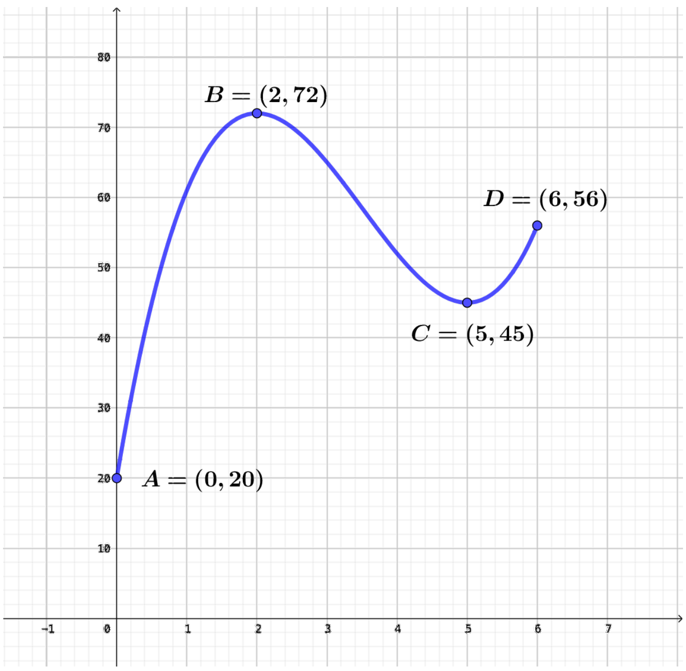
$$C''(t) = 12t - 42$$

- $C''(2) = 24 - 42 = -18 < 0 \longrightarrow$ Máximo relativo en $t = 2$.
- $C''(5) = 60 - 42 = 18 > 0 \longrightarrow$ Mínimo relativo en $t = 5$.

Pero hay que tener cuidado, pues nos piden los máximos y mínimos absolutos. Por tanto, vamos a ver cuanto vale **la función** en estos dos puntos y en los extremos.

- $C(0) = 20$.
- $C(2) = 72$.
- $C(5) = 45$.
- $C(6) = 56$.

Luego el máximo se encuentra en $t = 2$ con un caudal de 72 m^3/s y el mínimo en $t = 0$ con un caudal de 20 m^3/s.
Aunque no es necesario pintarla, para ver más claro lo que hemos hecho, os pongo aquí la gráfica de la función.



4. Se pide, justificando las respuestas:

   a) Hallar el área encerrada por la función: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$

Solución:

a) Se trata de calcular un área en un intervalo, por lo que habrá que ver primero si hay algún punto de corte dentro del intervalos que nos dan. Como es una ecuación de tercer grado tendremos que encontrar una raíz primero por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & -8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

Luego tenemos que $x = -1$ es una raíz del polinomio. Resolvemos la ecuación que nos queda.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Luego no hay ninguna raíz dentro del intervalo.
Vamos a hacer la integral para calcular el área.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 2x + 8\right)\, dx &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_0^2 = 4 - \frac{40}{3} + 4 + 16 = \\ &= \frac{12 - 40 + 12 + 48}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Luego el área buscada vale $A = \dfrac{32}{3}\ u^2$.

b) Vamos a calcular las asíntotas. Para orientarnos sobre que podemos encontrarnos miramos la función. Puede que haya asíntotas verticales en los valores que anulan el denominador. A su vez, por tener el mismo grado el numerador y el denominador ya se que voy a tener una asíntota horizontal y por tanto no tendré asíntota oblicua.
Empecemos por las verticales. Los valores que anulan el denominador son:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Veamos si esas rectas son asíntotas verticales.

- $x = -1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = -\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = -1$ es asíntota vertical. Bastaba con haber sustituido y ver que daba $\left[\dfrac{3}{0}\right]$, pues eso garantiza que los límites laterales se van al ∞ y por tanto hay asíntota vertical.

- $x = 4$

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{33}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = 4$ es asíntota vertical.

Veamos la horizontal. Para ello vamos a calcular el límite cuando $x \longrightarrow +\infty$. En las funciones racionales, si este límite es un número, el limite cuando $x \longrightarrow -\infty$ va a dar el mismo número.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \frac{2}{1} = 2$$

Luego la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de nuestra función. Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua por ser incompatibles.

5. El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con una desviación típica de 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.
Solución: Es, obviamente, un problema de inferencia estadística en el que nos piden el intervalo de confianza respecto de la media. La fórmula que tenemos que usar es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Tenemos los siguientes datos:

$$\overline{x} = 36 \qquad \sigma = 24 \qquad n = 100 \qquad \text{Nivel de confianza } 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Sustituyendo tendríamos

$$\left(36 - 1'96 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}}, 36 + 1'96 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}}\right) = (31'296, 40'704)$$

6. Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A le produce un beneficio de 30 euros y cada lote B 40 euros. Sabiendo que tiene a la venta como máximo 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, determinar la región factible y los posibles puntos solución del problema para que se obtengan los máximos beneficios. Justificar la respuesta.
Solución: Este es un ejercicio de programación lineal. Vamos a comenzar por definir las

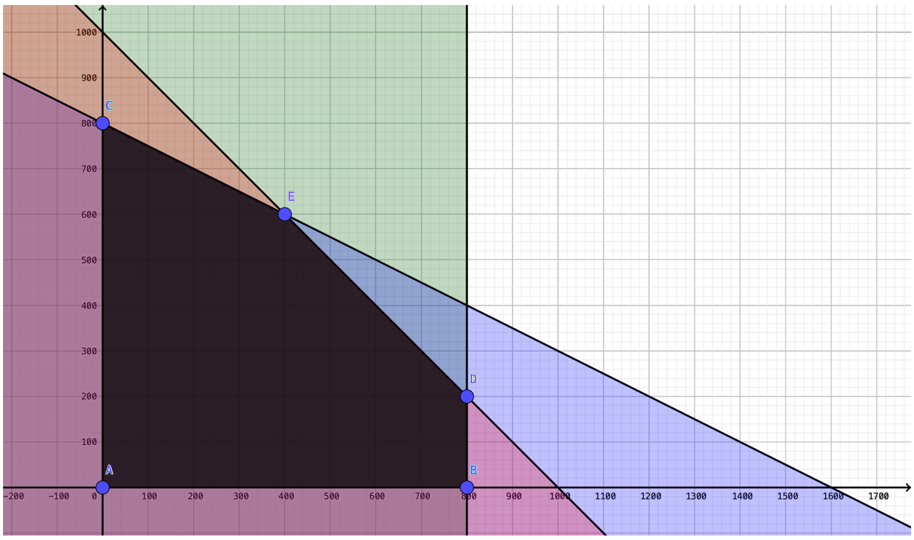
variables:

- $x \Longrightarrow$ Nº de lotes tipo A.
- $y \Longrightarrow$ Nº de lotes tipo B.

Vamos a construir la tabla que recopila todos los datos.

	Nº lotes tipo A	Nº lotes tipo B	Restricciones
Nº de lotes	x	y	$0 \leqslant x\ ; 0 \leqslant y$
Limoneros	x	$2y$	$x + 2y \leqslant 1600$
Naranjos	x		$x \leqslant 800$
Manzanos	x	y	$x + y \leqslant 1000$
Beneficio	$30 \cdot x$	$40 \cdot y$	$B(x, y) = 30 \cdot x + 40 \cdot y$

A continuación vamos a representar las rectas que nos salen y vemos las zonas que se producen. Hay que tener especial atención a la restricción $x \leqslant 800$ que es una recta vertical. La región factible que nos piden puedes verla en negro en la siguiente imagen.



Vamos a calcular los puntos de corte que nos piden. Son evidentes los siguientes:

- $A = (0, 0)$.
- $B = (800, 0)$.
- $C = (0, 800)$.

Calculemos los otros dos.

- $\left.\begin{array}{l} x = 800 \\ x + y = 1000 \end{array}\right] \Longrightarrow y = 200 \Longrightarrow D = (800, 200)$
- $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1600 \\ x + y = 1000 \end{array}\right] \Longrightarrow x = 400\ ;\ y = 600 \Longrightarrow E = (400, 600)$

No nos piden calcular los beneficios, con lo cual aquí termina el problema.

7. Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$$

a) Determinar, justificando la respuesta, para qué valor del parámetro x no existe A^{-1}.

b) Hallar la inversa de la matriz A para $x = 0$. Justificar la respuesta.

Solución:

a) Para que no tenga inversa, el determinante de la matriz tiene que valer 0. Vamos a calcular el valor del determinante y lo vamos a igualar a cero para ver el valor de x en el que se anula y por lo tanto no tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{vmatrix} = -4x + 2 - 2x - 8 = -6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

Luego si $x = -1$ la matriz no tiene inversa.

b) Vamos a hacer la inversa para $x = 0$. la matriz sería

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular paso a paso la inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -12 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -12 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. El precio de cada acción de una determinada empresa, x, oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción

y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

Se sabe que para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.
Solución: Tenemos que calcular los valores de A y B, luego habrá que plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para poder calcular dichos valores. Nos dicen que la función en el uno vale cuatro y que es continua. Eso se plasma en lo siguiente:

- $F(1) = 4 \Longrightarrow A + B = 4 \qquad\qquad (1)$

- Continuidad

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (Ax + B) = A + 2B \\ \lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2 - Bx + Ax^2) = 2 - 2B + 4A \end{array}\right] \Longrightarrow A + 2B = 2 - 2B + 4A \;(2)$$

Preparando el sistema y resolviendo obtenemos

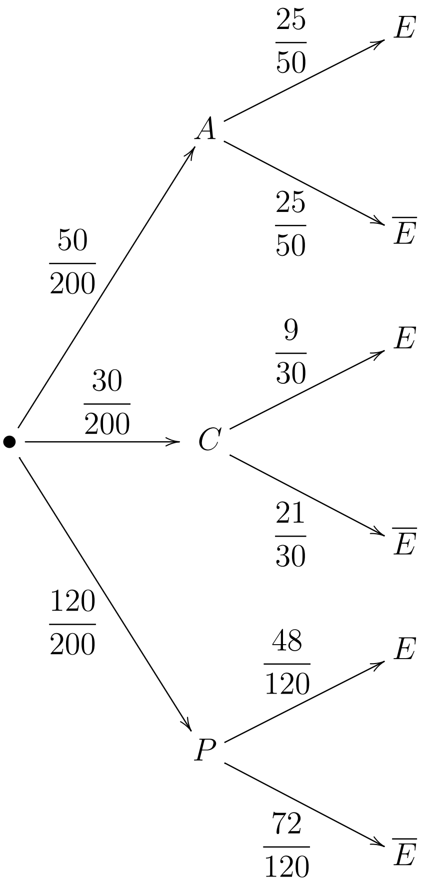
$$\left.\begin{array}{l} (1)\; A + B = 4 \\ (2)\; 3A - 4B = -2 \end{array}\right] \Longrightarrow A = 2 \;\; ; \;\; B = 2$$

9. En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

   a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga.

   b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

Solución: Hay un total de 200 árboles. El diagrama de árbol quedaría



Vamos a contestar a lo que nos preguntan.

a) Vamos a verlo de dos formas para que elijáis la que os resulte más sencilla.
La primera forma consiste simplemente en aplicar la regla de Laplace, es decir, considerar que los casos posibles son todos los pinos (120) y los favorables son los enfermos (48). En este caso la probabilidad sale:

$$P(\text{pino que está enfermo}) = \frac{48}{120}$$

Otra manera de hacerlo, desde mi punto de vista más sencillo, es darnos cuenta de que es una probabilidad condicionada directa, es decir, lo primero condiciona a lo segundo. El enunciado afirma que es un pino y nos pregunta que si está enfermo. Luego el ser pino condiciona lo segundo, estar enfermo. En este caso se trata del valor que va en la rama que va de pino a enfermo, y que no es otro que el calculado anteriormente.

b)

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(C \cap E) + P(P \cap E) = \\ &= \frac{50}{200} \cdot \frac{25}{50} + \frac{30}{200} \cdot \frac{9}{30} + \frac{120}{200} \cdot \frac{48}{120} = \frac{82}{200} = 0,41 \Longrightarrow 41\,\% \end{aligned}$$

10. Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable

que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Solución: El enunciado es un poco engañoso, pues hablan de que se desea conocer la media, pero no la necesitamos para nada. Nos piden el tamaño de la muestra, es decir, el valor de n.

Tenemos los siguientes datos:

$$\sigma = 400 \qquad \text{Nivel de confianza } 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Dado que la fórmula del intervalo de confianza es

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

deducimos que el tamaño del intervalo es

$$T = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Queremos averiguar cuanto tiene que valer n para que el tamaño del intervalo sea de 160.

$$2 \cdot 1,96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} = 160 \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1,96 \cdot 400}{160} = 9,8 \Longrightarrow n = 9,8^2 = 96,04$$

Luego tendríamos que tomar una muestra de 97 elementos para garantizar que no excede de 160.

VÍDEOS POR BLOQUES TEMÁTICOS

- **Álgebra.**
- **Programación lineal.**
- **Análisis.**
- **Diagramas de árbol.**
- **Tablas de contingencia.**
- **Inferencia estadística.**